

SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DE ÁGUA SUBTERRÂNEA UTILIZANDO MÉTODOS DE ELEMENTOS DE CONTORNO

Jaime Joaquim da Silva Pereira Cabral

RESUMO

O método de elementos de contorno tem se mostrado um poderoso instrumento na análise de diversos problemas de engenharia. As equações diferenciais parciais não submetidas a uma transformação de modo a se obter uma equação integral no contorno do domínio. O método é adequado para problemas de água subterrânea e em geral apresenta vantagens na simulação computacional de superfícies livres, interfaces móveis, domínio infinito e problemas com singularidades.

No presente trabalho é apresentada uma descrição da formulação matemática e de implementação computacional. São tratados também os casos de anisotropia, heterogeneidade e de contornos móveis. Por último é apresentada uma análise do movimento de interface entre água doce e água salgada no caso de intrusão marinha.

ABSTRACT

Boundary Element Method (BEM) have emerged as a powerful tool for solving several kinds of problems. Using an integral formulation instead of a differential one the domain of calculation is reduced by one and generally there is a great gain in efficiency. BEM is specially suitable for moving boundary problems, case studies with infinite regions and problems with point loads.

This work describes the boundary element method, and shows the mathematical formulation and the computational implementation. Several cases are analysed such as anisotropy, heterogeneity and moving boundary configurations. At the end a moving interface between fresh and salt water is presented for salt water intrusion analysis.

INTRODUÇÃO

1. ELEMENTOS DE CONTORNO

O método de elementos de contorno (MEC) surgiu no fim da década de 70 e tem-se mostrado um poderoso instrumento na análise de diversos problemas de engenharia. Aplica-se uma transformação sobre as equações diferenciais num domínio, de modo a se obter uma formulação integral no contorno do domínio.

Uma das vantagens do método sobre os outros processos consiste na redução da quantidade de dados necessários para resolver o problema em estudo, além de em geral apresentar uma melhor precisão numérica dos resultados.

A melhoria da precisão dos resultados é particularmente importante quando se necessita das derivadas das variáveis. Outros processos, como MDF e MEF, calculam de início só o valor das variáveis. Isto acarreta um erro relativamente grande no cálculo das derivadas, enquanto que no MEC já se calcula diretamente o valor das variáveis e de suas derivadas.

O método de elementos de contorno apresenta ainda vantagens na simulação numérica de superfícies livres, interfaces móveis, domínio infinito e problemas com singularidades.

Em se tratando de água subterrânea, o método de elementos de contorno é em geral muito adequado. No entanto, não é eficiente no caso do meio poroso altamente heterogêneo, quando se torna necessário dividir o domínio em várias sub-regiões, perdendo-se a vantagem do método em utilizar as equações apenas no contorno da região de estudo.

2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

O escoamento de água subterrânea, como diversos outros problemas de engenharia, é descrito por equações diferenciais parciais aplicadas a uma determinada região em estudo. O método de elementos de contorno consiste basicamente em transformar esta equação diferencial parcial numa equação integral relacionada apenas ao contorno da região e em seguida se achar a solução numérica desta equação.

Considere-se a equação de Laplace :

$$\nabla^2 h = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (1)$$

com as condições de contorno

$$h = \bar{h} \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (2)$$

$$q = \frac{\partial h}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (3)$$

onde Γ é o contorno da região Ω ($\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$).

A integral no contorno equivalente a (1), obtida pela técnica dos resíduos ponderados ou pela segunda identidade de Green (Brebbia, 1978), (Brebbia et al., 1984), (Brebbia e Dominguez, 1989), é da forma:

$$c^i h^i + \int_{\Gamma} h q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} h^* q d\Gamma \quad (4)$$

onde $c^i = \theta / 2\pi$, para o ponto i no contorno Γ , θ é o ângulo interno no ponto i e $q = \partial h / \partial n$.

A função h^* é a solução fundamental do problema, também chamada de função de influencia (Gipson, 1987), e matematicamente corresponde a uma função de Green. Em problemas de elasticidade a interpretação física de h^* é relacionada ao deslocamento num ponto fonte no grupo, devido à carga unitária aplicada num ponto fonte. Semelhantemente, na teoria do potencial, corresponde ao potencial num ponto campo devido a uma fonte unitária aplicada a um ponto fonte fixo.

Para problemas bidimensionais a solução fundamental é:

$$h^* = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$$

e sua derivada normal é:

$$q^* = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n}$$

no qual r é a distância entre os pontos fonte e campo.

Em geral, a equação integral (4) não pode ser manipulado de uma forma mais simples. Então, no MEC, o contorno é discretizado em vários elementos e a seguinte equação é obtida.

$$c^i h^i + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} h q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} h^* q d\Gamma \quad (5)$$

A variação de q e h em cada elemento pode ser descrita usando funções de interpolação, assumindo as incógnitas em alguns pontos no contorno, geralmente chamados nós.

Depois de aplicar as funções de interpolação, equação (5) é aplicada num número de pontos de colocação igual ao número de incógnitas.

Um sistema de equações é obtido:

$$\mathbf{H} \mathbf{h} = \mathbf{G} \mathbf{q} \quad (6)$$

A computação dos termos das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} será mostrada a seguir.

2.1 Fontes e sumidouros

Somente fontes e sumidouros serão considerados nesta subsecção. Para este caso, o problema é descrito pela equação de Poisson

$$\nabla^2 h = d$$

onde d é relacionado à intensidade e à posição da fonte.

Aplicando uma formulação de elemento de contorno como previamente, obtém-se

$$\mathbf{H} \mathbf{h} = \mathbf{G} \mathbf{q} + \mathbf{D} \quad (7)$$

onde

$$D(\xi) = \int_{\Omega} d(x) h^*(\xi, x) d\Omega \quad (8)$$

no qual ξ é o ponto de colocação. Para um ponto fonte, aplicado em um ponto \bar{x} , pode-se usar a função delta de Dirac $\Delta(x, \bar{x})$

$$d(x) = P(\bar{x}) \Delta(x, \bar{x})$$

onde P é a intensidade da fonte. Então

$$D(\xi) = P(\bar{x}) \int_{\Omega} \Delta(x, \bar{x}) h^*(\xi, x) d\Omega$$

$$D(\xi) = P(\bar{x}) h^*(\xi, \bar{x})$$

2.2 Pontos internos

A computação do potencial nos pontos internos pode ser descrita pela equação

$$h(\xi) + \int_{\Gamma} h(x) q^*(\xi, x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} q(x) h^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad (9)$$

Para o caso de um poço em \bar{x} , o termo fonte é adicionado para o segundo membro de (9)

$$h(\xi) + \int_{\Gamma} h(x) q^*(\xi, x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} q(x) h^*(\xi, x) d\Gamma(x) + P(\bar{x}) h^*(\xi, \bar{x}) \quad (10)$$

A computação das derivadas dos potenciais em cada direção x_i pode ser obtida por

$$\frac{\partial h(\xi)}{\partial x_i(\xi)} = \int_{\Gamma} q(x) \frac{\partial h^*(\xi, x)}{\partial x_i(\xi)} d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} h(x) \frac{\partial q^*(\xi, x)}{\partial x_i(\xi)} d\Gamma(x) + P(\bar{x}) \frac{\partial h^*(\xi, \bar{x})}{\partial x_i} \quad (11)$$

3 DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO

Conforme explicado anteriormente, divide-se então o contorno em pequenos segmentos (caso bidimensional) ou polígonos (caso tridimensional) e o resultado da integral em Γ será o somatório das integrais em cada elemento. Em problemas bidimensionais podem ser utilizados elementos constantes, lineares, quadráticos ou de ordem superior. Cada elemento é formado por um ou mais nós, de modo que as integrais da equação (5) tornam-se funções das incógnitas dos nós j que formam cada elemento k .

3.1 Elementos constantes

A integração mais simples é obtida quando se tem apenas um nó em cada elemento. Neste caso a incógnita pode sair da integral. Assim, o resultado da integral é um coeficiente que representa a influência do nó i no segmento j . Logo:

$$c_i h_i = \sum_{j=1}^n q_j G_{ij} - \sum_{j=1}^n h_j \bar{H}_{ij} \quad (12)$$

onde i é chamado ponto-fonte e os pontos do segmento j são pontos-campos.

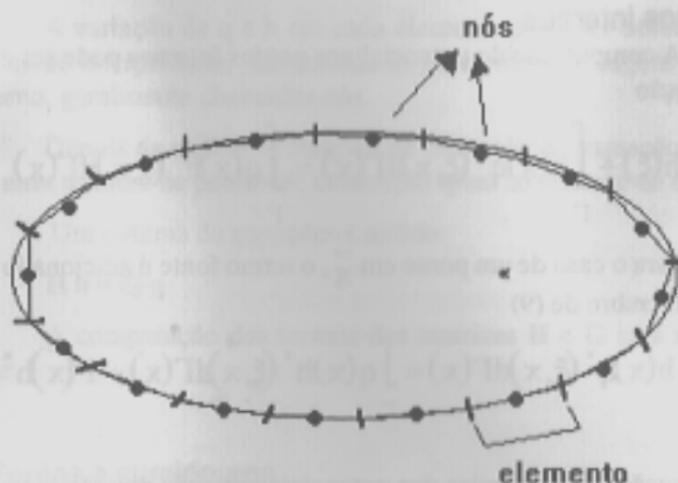


Figura 1. Elementos Constantes

Colocando em forma de matriz e incluindo o termo do 1º membro na matriz H modificada da seguinte forma:

$$H_{ij} = \tilde{H}_{ij} \quad \text{para } i \neq j \quad (13)$$

$$H_{ij} = \tilde{H}_{ij} + c_i \quad \text{para } i = j$$

$$\sum_{j=1}^n H_{ij} h_j = \sum_{j=1}^n G_{ij} q_j \quad (14)$$

ou seja,

$$[H]\{h\} = [G]\{q\} \quad (15)$$

De acordo com o tipo de condições de contorno, alguns nós apresentam h conhecido e outros apresentam q conhecido. Transferindo-se os termos conhecidos para o segundo membro e deixando-se as incógnitas no primeiro, chega-se a um sistema do tipo:

$$[A]\{X\} = [F] \quad (16)$$

3.2 Elemento linear

Para problemas bidimensionais com dois nós por elemento, usa-se uma função de interpolação linear para h e q em cada elemento. Chamando de n uma coordenada adimensional com origem no centro do elemento, as funções de interpolação são:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{2}(1-n) \\ f_2 &= \frac{1}{2}(1+n) \end{aligned} \quad (17)$$

As funções h e q em cada ponto do elemento tornam-se:

$$\begin{aligned} h(n) &= f_1 h_1 + f_2 h_2 \\ q(n) &= f_1 q_1 + f_2 q_2 \end{aligned} \quad (18)$$

Assim as integrais ao longo do elemento podem ser escritas como

$$\int_{\Gamma_j} h q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [f_1 f_2] h^* d\Gamma \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ H_{ij} & H_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

$$\int_{\Gamma_j} q h^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [f_1 f_2] h^* d\Gamma \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{ij}^1 & G_{ij}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

Aplicando (19) na equação (12):

$$c_i h_i + \sum_{j=1}^n \tilde{H}_{ij} h_j = \sum_{j=1}^n G_{ij} q_j \quad (20)$$

onde \tilde{H}_{ij} corresponde à soma das duas parcelas \tilde{H} referentes a cada nó, devidas aos elementos adjacentes ao mesmo, assim como para a parcela G_{ij} .

Em seguida repete-se o mesmo procedimento da equação (13) até (16), conforme utilizado para elementos constantes.

As integrais podem ser calculadas numericamente utilizando por exemplo a técnica de Gauss, exceto para o segmento que corresponde ao nó em consideração. Neste caso, aplica-se a propriedade segundo a qual a soma dos H para uma linha i é igual a zero (Brebbia et alli, 1984). Daí:

$$H_{ij} = - \sum_{j=1}^n H_{ij} \quad (21)$$

e os termos G_{ij} podem ser calculados analiticamente pela fórmula :

$$G_{ii} = \frac{l_{i-1}}{2} \left[\frac{3}{2} - \ln(l_{i-1}) \right] + \frac{l_i}{2} \left[\frac{3}{2} - \ln(l_i) \right] \quad (22)$$

onde l_{i-1} e l_i são os comprimentos dos elementos adjacentes ao nó i (Brebbia et alli, 1984).

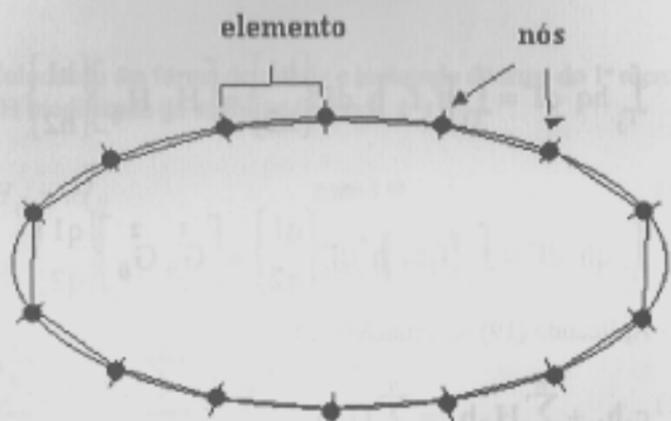


Figura 2. Elementos Lineares

3.3 Elemento quadrático

Algumas vezes é preferível usar elementos quadráticos, quando por exemplo o contorno tem forma curva. Geralmente, para o mesmo nível de precisão é necessário menos elementos de que quando se trabalha com elementos lineares.

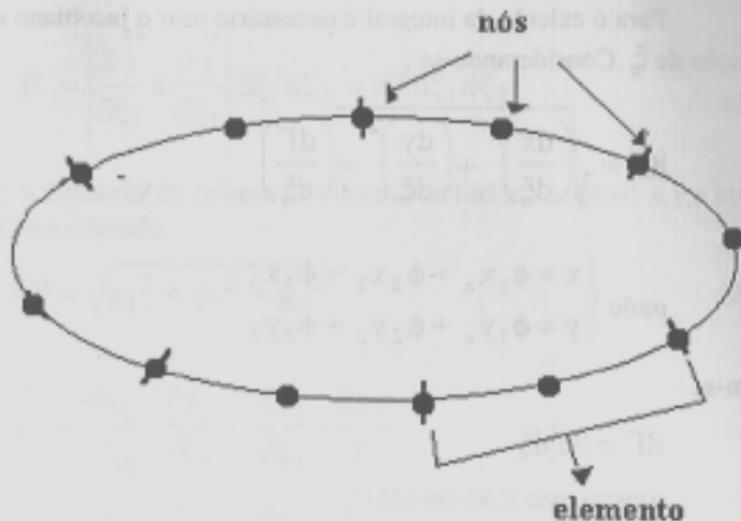


Figura 3. Elementos Quadráticos

Para um problema bidimensional, pode-se usar as funções de interpolação para os três nós em função das coordenadas locais ξ :

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \\ \phi_2 &= \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)\end{aligned}\quad (23)$$

$$\phi_3 = (1 - \xi)(1 + \xi)$$

A carga hidráulica em algum ponto do elemento é então expressa por:

$$h(\xi) = \phi_1 h_1 + \phi_2 h_2 + \phi_3 h_3 \quad (24)$$

e a integral ao longo do elemento j torna-se:

$$\int_{\Gamma_j} h(\xi) q^* d\Gamma = \int [\phi_1 \phi_2 \phi_3] \mathbf{h}^* d\Gamma \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

Para o cálculo da integral é necessário usar o jacobiano de ϕ_i em função de ξ . Considerando-se:

$$|G| = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} = \left(\frac{d\Gamma}{d\xi}\right) \quad (26)$$

$$\text{onde} \begin{cases} x = \phi_1 x_a + \phi_2 x_2 + \phi_3 x_3 \\ y = \phi_1 y_a + \phi_2 y_2 + \phi_3 y_3 \end{cases} \quad (27)$$

tem-se:

$$d\Gamma = |G| d\xi \quad (28)$$

substituindo (28) em (25):

$$\int_{\Gamma_j} h(\xi) q^* d\Gamma = \int_1 h(\xi) q^* |G| d\xi \quad (29)$$

que pode ser integrada numericamente. A integral do termo em q é feita de maneira análoga.

3.4 Pontos Internos

Quando se aplica o método de elementos de contorno, ao se encontrar a solução de problema formulado se obtém os valores da carga hidráulica e de sua derivada nos nós do contorno.

Se é do interesse calcular a carga hidráulica ou sua derivada em algum ponto interno, aplica-se novamente o método, onde agora todo o contorno é conhecido e as incógnitas estão nos pontos internos desejados.

3.5 Problema tridimensional

Brebbia & Dominguez (1989) e Liggett & Liu (1983) apresentam a maneira de realizar a integração ao longo da área dos elementos num problema tridimensional.

É necessário estabelecer uma maneira de passar das coordenadas x, y, z do sistema cartesiano global para as coordenadas ξ_1, ξ_2, η definidas sobre o elemento, sendo as duas primeiras ao longo do elemento e a última normal a ele.

A diferencial de área será dada por :

$$d\Gamma = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_2} \right| d\xi_1 d\xi_2 = |G| d\xi_1 d\xi_2 \quad (25)$$

onde \vec{r} é a distância da origem do sistema cartesiano original x, y, z até o elemento considerado.

$$|G| = \sqrt{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2} \quad (26)$$

onde:

$$g_1 = \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1}$$

$$g_2 = \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \quad (27)$$

$$g_3 = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}$$

Portanto as integrais a serem calculadas têm a seguinte forma:

$$\int_{\Gamma_\xi} h^* \cdot q \cdot |G| \cdot d\xi_1 \cdot d\xi_2 \quad (28)$$

$$\int_{\Gamma_\xi} h \cdot q^* \cdot |G| \cdot d\xi_1 \cdot d\xi_2$$

4. RECARGA E BOMBEAMENTO

No caso de recarga do aquífero por infiltração de águas pluviais, o influxo de água se dá no contorno da região e, neste caso, a modelagem matemática é feita simplesmente através de adequada condição de contorno que inclua esse fluxo.

No caso de bombeamento ou recarga através de poços ou drenos, a carga hidráulica em todo o domínio sofre esta influência e o problema matematicamente passa a ser descrito pela equação de Poisson:

$$\nabla^2 h + \frac{R}{T} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (29)$$

onde T é a transmissividade do aquífero e o termo R corresponde à taxa de extração ou recarga por unidade de volume ($m^3/s/m^3$), no caso de problema tridimensional, ou taxa por unidade de área, no caso bidimensional ($m^3/s/m^2$).

Geralmente considera-se que R é positivo se água é adicionada e negativo se água é retirada do aquífero.

Ao ser repetido o método de resíduos ponderados e inclusão de solução fundamental, a equação fica acrescida de um termo:

$$c_i h_i + \int_{\Gamma} h \cdot q^* d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{R}{T} h^* d\Omega = \int_{\Gamma} q \cdot h^* d\Gamma \quad (30)$$

A integral ao longo de Ω não introduz nenhuma incógnita, já que R/T é uma função conhecida. De acordo com o tipo de função, a integral pode ser resolvida analiticamente ou de forma numérica por discretização do domínio.

No caso de não se conseguir uma solução analítica para a integração, o domínio é discretizado de uma forma semelhante ao método de elementos finitos. Em cada elemento a integral numérica é aplicada e no final é efetuado o somatório (Brebbia et al, 1984):

$$\int_{\Omega} \frac{R}{T} h^* d\Omega = \sum_{k=1}^m \left(\int_{\Omega_k} \frac{R}{T} h^* d\Omega \right) \quad (31)$$

onde m é o número de células.

Para o caso de fontes puntiformes, a integração do termo da recarga pode ser feita facilmente. Fontes puntiformes podem simbolizar uma exploração ou recarga numa direção perpendicular ao plano em estudo, no caso bidimensional (por exemplo, dreno perpendicular a uma seção vertical do aquífero ou poço em relação a um plano horizontal do aquífero).

A solução é obtida aplicando-se a função delta de Dirac:

$$\frac{R}{T}(x, y, z, t) = \frac{R}{T} \Delta_k$$

$$\int_{\Omega} \frac{R}{T} h^* d\Gamma = \int_{\Omega} \Delta_k h^* d\Omega = \frac{R}{T} h_k^* \quad (32)$$

onde h_k^* é o valor da solução fundamental no ponto k .

5. HETEROGENEIDADE E ANISOTROPIA

A condutividade hidráulica pode ser expressa matematicamente como um tensor e pode variar ao longo dos eixos cartesianos:

$$K = K(x, y, z)$$

No caso mais geral, o tensor da condutividade hidráulica apresenta nove componentes que são função da posição do ponto no aquífero. Normalmente, para efeito prático são feitas algumas simplificações que dão resultado satisfatório, principalmente levando-se em consideração a dificuldade de obtenção de dados de campo com grande precisão.

O caso mais simples consiste em admitir K constante, conforme visto anteriormente. Em seguida são apresentadas algumas outras considerações que procuram simular da melhor maneira possível as condições reais.

5.1 Sub-regiões

Algumas vezes é possível considerar que, até determinada posição, a condutividade hidráulica apresenta um valor constante diferente do primeiro.

Neste caso, o problema pode ser dividido em sub-regiões. A equação é aplicada a cada uma das regiões separadamente e as matrizes obtidas são combinadas e condensadas usando as equações de compatibilização da carga hidráulica e do gradiente ao longo da interface:

$$h_1 = h_2 \quad (33)$$

$$-K_1 \left(\frac{\partial h}{\partial n} \right)_1 = K_2 \left(\frac{\partial h}{\partial n} \right)_2 = q_n \quad (34)$$

Ao ser feita a discretização dos contornos das regiões, cada nó será numerado duas vezes, uma em cada região e as duas equações anteriores se aplicarão a cada nó.

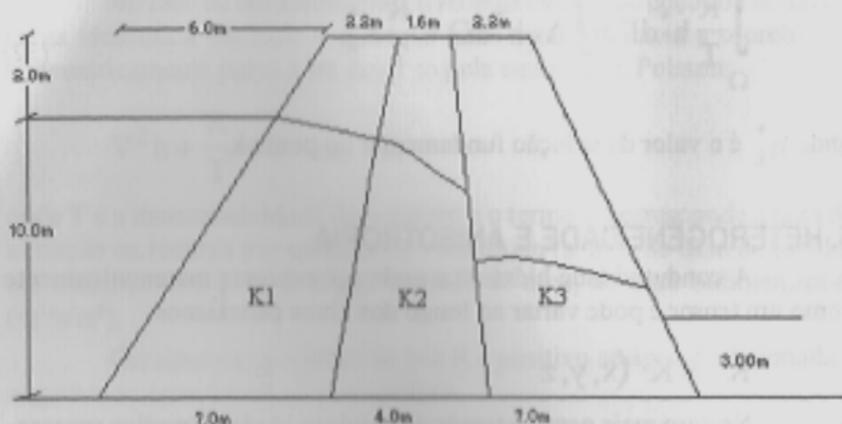


Figura 4. Barragem zonada.

A metodologia acima foi aplicada por Cabral, (1992) a uma barragem zonada formada por três zonas conforme representado na figura 4. As características da barragem são semelhantes à barragem apresentada por Bruch et al., (1986). A tabela abaixo compara os resultados mostrando uma boa concordância.

	Elemento B-Spline	MEC (Bruch et al, 1987) elementos quadráticos
número de nós	54	100
H_a	9.705	9.71
H_b	8.059	7.90
H_c	5.403	5.48
H_d	3.146	3.11

5.2 Ortotropia

Primeiramente, pode-se efetuar uma rotação no sistema de eixos cartesianos, de tal maneira que os eixos fiquem paralelos às direções de ortotropia. Neste caso as nove componentes da condutividade hidráulica se reduzem apenas aos três valores de diagonal K_x , K_y , e K_z .

Através de uma transformação de variáveis, pode ser obtida a solução fundamental para esse caso:

$$h^* = \frac{1}{4\pi r_0} \frac{1}{\sqrt{K_x K_y K_z}} \quad (35)$$

$$r_0 = \sqrt{\frac{(x_i - x)^2}{K_x} + \frac{(y_i - y)^2}{K_y} + \frac{(z_i - z)^2}{K_z}}$$

para o caso tridimensional, e

$$h^* = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{K_x K_y}} \ell_n \left(\frac{1}{r_0} \right) \quad (36)$$

$$r_0 = \sqrt{\frac{(x_i - x)^2}{K_x} + \frac{(y_i - y)^2}{K_y}} \quad (37)$$

para o caso bidimensional.

O gradiente no contorno pode ser calculado como a norma dos gradientes em cada direção:

$$q = K_x \frac{\partial h}{\partial x} n_x + K_y \frac{\partial h}{\partial y} n_y + K_z \frac{\partial h}{\partial z} n_z \quad (39)$$

e no caso bidimensional sem incluir o terceiro termo.

5.3 Anisotropia completa

Para o caso bidimensional de anisotropia completa a equação do problema é:

$$K_{xx} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 2K_{xy} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + K_{yy} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (40)$$

onde K_{ij} são as componentes do tensor da condutividade hidráulica (em alguns casos pode ser conveniente expressar a transmissividade ao invés da condutividade hidráulica, mas o procedimento é semelhante).

A solução fundamental é

$$h^* = \frac{1}{\sqrt{|K_{i,j}|}} \ell_n \frac{1}{r} \quad (41)$$

onde $|K_{i,j}|$ é o determinante da matriz do tensor:

$$|K_{i,j}| = K_{xx}K_{yy} - K_{xy}^2 \quad (42)$$

e r é expresso por:

$$r = \sqrt{\frac{(x_i - x)^2}{K_{xx}} + \frac{2(x_i - x)(y_i - y)}{K_{xy}} + \frac{(y_i - y)^2}{K_{yy}}} \quad (43)$$

O fluxo normal ao contorno é

$$q = \left(K_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} + K_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) n_x + \left(K_{xy} \frac{\partial h}{\partial x} + K_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) n_y \quad (44)$$

6 CONDIÇÕES DE CONTORNO

6.1 Carga hidráulica ou fluxo

Na Formulação matemática do MEC, ao se realizar a transformação de uma equação no domínio para uma equação no contorno, obtém-se para cada nó do contorno duas incógnitas e apenas uma equação. É necessário especificar um dos valores, enquanto o outro fica como incógnita a ser calculada na solução do problema.

Portanto no caso das condições de contorno de Dirichlet (carga hidráulica conhecida) ou Neumann (fluxo conhecido) basta substituir o valor conhecido no local correspondente da matriz.

No caso de todo o contorno apresentar condições do tipo Neumann o problema fica indeterminado. É necessário então especificar a carga hidráulica de pelo menos um ponto para eliminar a indeterminação.

6.2 Contorno semi-permeável

No caso de contorno semi-permeável, existe uma relação linear entre a carga hidráulica e o fluxo:

$$q + a h = b \quad (45)$$

onde a e b são parâmetros que dependem da condutividade hidráulica e da espessura da camada semi-confinante, como também da carga hidráulica do aquífero adjacente à citada camada.

Substituindo o valor de q em cada nó onde ocorre contorno semi-permeável, observa-se que o termo b pode ir para o segundo membro e ser condensado no vetor de termos independentes.

O termo ah é adicionado ao primeiro membro. No local correspondente da matriz dos coeficientes das incógnitas adiciona-se o valor de "a" multiplicado pelos coeficientes de G :

$$(H - G.a)h = G.b \quad (46)$$

6.3 Interface

No caso de problema com sub-regiões, um trecho do contorno de cada sub-região é formado pela interface com a outra. Neste trecho, aplicam-se as equações de compatibilização da carga hidráulica e do gradiente:

$$h_1 = h_2 \quad (47)$$

$$q_n = -K_1 \left(\frac{\partial h}{\partial n} \right)_1 = K_2 \left(\frac{\partial h}{\partial n} \right)_2 \quad (48)$$

No caso de se trabalhar com elementos lineares e se usar nós duplos nos cantos da região, haverá uma superposição de 4 nós no encontro de interface com o contorno.

Quando a condição especificada no contorno junto à interface é do tipo gradiente conhecido, geralmente não há problemas. No entanto, se a condição for do tipo potencial (carga hidráulica) conhecido e tendo o gradiente como incógnita, as equações correspondentes aos quatro nós coincidentes tornam-se linearmente dependentes e o sistema de equações apresenta então uma singularidade. Cabral e Wrobel (1985) eliminaram a singularidade no caso de ponto de interface de uma cunha salina, impondo aos nós da interface coincidentes com o contorno os valores da carga hidráulica igual ao do contorno adjacente e do gradiente igual a zero.

Bruch et alli (1986) realizaram um estudo detalhado dos casos de interação de interfaces, levando em conta o vetor-velocidade nos nós da interseção, para evitar problemas numéricos devido a mudanças bruscas na direção da velocidade.

7 PROBLEMA NÃO PERMANENTE

Problemas de escoamento não permanente têm sido resolvidos por transformada de Laplace, por discretização em diferenças finitas no tempo, por solução fundamental dependente do tempo ou por reciprocidade dual.

7.1 Transformada de Laplace

Aplicando-se uma transformada de Laplace (Wrobel & Brebbia, 1981), (Brebbia & Walker, 1980), à expressão da carga hidráulica, a dimensionalidade do problema é reduzida e a formulação torna-se independente do tempo.

Depois de resolver este problema, é efetuada a transformação inversa, que leva aos valores procurados da incógnitas no tempo desejado.

Para aplicação do método é importante ter idéia do provável comportamento da solução (Wrobel & Brebbia, 1981) para fazer uma escolha adequada da função a ser utilizada.

Este método é pouco prático, principalmente quando se tem variações complicadas das condições de contorno em relação ao tempo.

7.2 Discretização no tempo por diferenças finitas

Considerando um meio homogêneo e isotrópico, a equação do escoamento não permanente num aquífero pode ser expressa por:

$$K \cdot \nabla^2 h = \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{em } \Omega \quad (49)$$

O termo em t pode ser aproximado por diferenças finitas da forma

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h_{t+\Delta t} - h_t}{\Delta t} \quad \text{em } \Omega \quad (50)$$

aplica-se a equação 30 na eq. (49). A solução fundamental (Wrobel & Brebbia, 1981) para a nova equação num problema bidimensional é:

$$h^* = \frac{1}{2\pi k} K_0 \left(\frac{n}{\sqrt{k \cdot \Delta t}} \right) \quad (51)$$

onde K_0 é a função modificada de Bessel do segundo tipo de ordem zero.

A equação integral no contorno para este caso fica:

$$c_i h_{i+\Delta t} + K \int_{\Gamma} q^* h_{i+\Delta t} d\Gamma = K \int_{\Gamma} h^* q_{i+\Delta t} d\Gamma + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} h^* h_i d\Omega \quad (52)$$

Partindo-se da condição inicial para os valores obtidos para $h_{i+\Delta t}$ servem como condição inicial para os "steps" seguintes e assim sucessivamente.

Em cada "step" é necessário fazer uma integração ao longo de todo o domínio Ω (eq. 52). Se for utilizado Δt constante, é possível obter uma única matriz que pode ser armazenada para os passos seguintes.

Além disso, é preciso que os "steps" de tempo sejam bastante pequenos, de modo a garantir a estabilidade e a convergência. Isso torna o processo muito dispendioso em termos de tempo de processamento.

8. CONTORNO MÓVEL OU DESCONHECIDO

O método de elementos de contorno tem-se constituído um instrumento eficiente e de grande flexibilidade para simulação numérica de problemas com contornos móveis. Esse tipo de problema tem sido basicamente pesquisado em dois casos: no caso de aquíferos não-confinados, onde a superfície livre pode variar de forma e de posição e no caso de intrusão marinha, quando a interface de separação entre a água doce e a água salgada pode se deslocar.

Este tipo de enfoque pode ser aplicado tanto ao caso permanente, onde a forma e a posição da superfície é desconhecida e se procura determiná-la, como ao caso transiente, em que se procura a nova posição da superfície depois de certo intervalo de tempo.

8.1 Posição da superfície no estado permanente

Liggett (1977) apresentou um procedimento iterativo para determinação da superfície livre que teve sua aplicação bastante difundida em trabalhos posteriores, com pequenas variações (Wrobel et alii, 1986), (Liu, Brebbia and Adey, 1985). O procedimento consiste nos seguintes passos:

1. Escolher uma curva para a aproximação inicial da superfície freática. Esta curva é uma linha de corrente e a condição de contorno é de gradiente normal nulo ($q=0$).
2. Resolver o problema para calcular a carga hidráulica.

3. Comparar a carga hidráulica obtida com a elevação do ponto. A carga

hidráulica $h = \frac{P}{\lambda} + z$ deve coincidir com a elevação z , já que na superfície livre atua a pressão atmosférica ($P_{\text{atm}} = 0$). No caso de não coincidir, calcula-se o desvio. Se esse desvio for inferior a uma tolerância especificada, a posição de superfície é considerada satisfatória e pode-se parar o processo.

4. No caso do desvio ser superior à tolerância, corrigir a posição pela expressão (Bruch et alli, 1987):

$$z_j = \theta \cdot h_j + (1 - \theta) z_{j-1} \quad (53)$$

e reiniciar o processo, onde j é o número da iteração e θ é um fator de ponderação (geralmente usa-se $\theta = 0.5$).

Liggett e Liu (1983), ao invés de especificar fluxo nulo na superfície, especificam a carga hidráulica igual à elevação e calculam o fluxo, sendo a correção feita por:

$$h^j = h^{j-1} - \frac{K \cdot \Delta t}{\eta \cos \beta^{j-1}} \left[\theta \left(\frac{\partial h}{\partial n} \right)^j + (1 - \theta) \left(\frac{\partial h}{\partial n} \right)^{j-1} \right] \quad (54)$$

em que K é a condutividade hidráulica, η é a porosidade, Δt é um "step" de tempo (pequeno para evitar problema de estabilidade) e β é o ângulo entre a superfície livre e a horizontal.

Bruch et alli (1987) mostraram que o valor do potencial (carga hidráulica) é de 10 a 20 vezes menos sensível a variações da geometria do contorno perto do ponto considerado do que o valor do gradiente. Sendo assim, a correção da equação (53) melhora significativamente a convergência e a estabilidade.

Quanto ao critério de convergência a ser adotado no passo 3, pode ser utilizado no cálculo o máximo desvio relativo:

$$\text{Max}_i(\varepsilon) = \text{Max}_i \left| \frac{(z_i^j - z_i^{j-1})}{z_i^j} \right| \leq \varepsilon_0 \quad (55)$$

onde ε_0 é a tolerância desejada, o índice i refere-se à numeração dos nós da superfície.

Uma outra maneira de limitar o desvio é feita através da soma dos quadrados dos desvios localizados

$$\varepsilon = \sum_i (z_i^j - z_i^{j-1})^2 \leq \varepsilon_0 \quad (56)$$

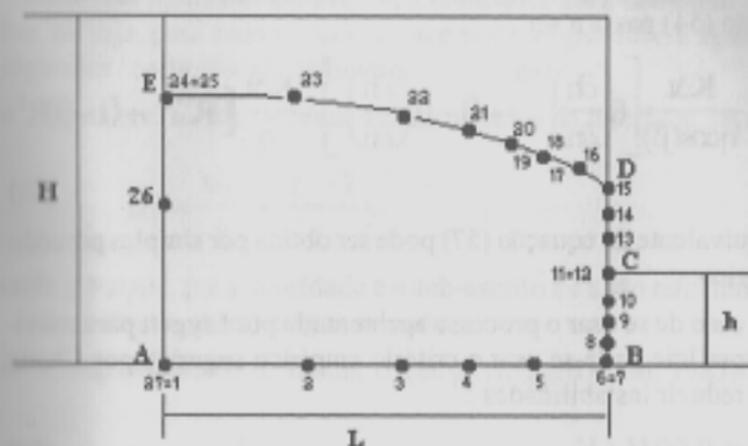


Figura 5. Superfície no regime permanente.

A figura 5 mostra uma aplicação do cálculo da superfície no regime permanente, indicando a discretização utilizada.

8.2 Posição da superfície no caso transiente

O procedimento é semelhante ao anteriormente descrito, sendo que no esquema proposto por Bruch, o gradiente não é mais nulo e pode ser calculado para cada "step" seguinte com uma simples manipulação algébrica na equação (54) :

$$\left(\frac{\partial h}{\partial n}\right)^{t+\Delta t} = (h^t - h_j^{t+\Delta t}) \frac{\eta \cos \alpha}{K\theta \Delta t \cos(\alpha + \beta)} - \frac{1 - \theta}{\theta} \left(\frac{\partial h^t}{\partial n}\right) \quad (57)$$

que é válida para um sistema de eixos que tenha sofrido uma rotação onde o ângulo α é o ângulo entre o novo eixo x e o antigo. Se não houver rotação $\alpha = 0$.

A equação acima é aplicada como condição de contorno ao sistema de equações e é feito processo iterativo para ajuste do valor da posição z. Pelo esquema proposto por Liggett, esse ajustamento iterativo não é feito. Assim, para que não surjam problemas de estabilidade deve-se usar um pequeno valor Δt . Chang (1986) apresentou um esquema para reduzir as instabilidades a um valor médio para o gradiente no espaço e no tempo.

No caso de haver recarga uniformemente distribuída na superfície, a equação (54) passa a ser:

$$h^{t+\Delta t} = h^t - \frac{K\Delta t}{\eta \cos(\beta)} \left[\theta \left(\frac{\partial h}{\partial n} \right)^{t+\Delta t} + (1-\theta) \left(\frac{\partial h}{\partial n} \right)^t \right] + \frac{K\Delta t}{\eta} \left[\theta R^{t+\Delta t} + (1-\theta) R^t \right] \quad (58)$$

e a forma equivalente da equação (57) pode ser obtida por simples procedimento algébrico.

No caso de se usar o processo apresentado por Liggett para movimento da superfície pode-se usar o critério empírico sugerido por Chang (1986) para reduzir instabilidades :

$$\Delta t \leq 0.02H / V_{max} \quad (59)$$

onde H é a diferença total de carga hidráulica e V_{max} é a maior das velocidades médias dos nós.

8.3 Interface água doce/ água salgada

O problema de intrusão salina pode ser modelado de maneira bastante satisfatória pelo método de elementos de contorno. Kemblowsky (1987) apresentou uma boa revisão bibliográfica do assunto.

Cabral e Cirilo (1987) fizeram uma aplicação do método para análise da intrusão marinha no aquífero Beberibe, aplicando um modelo bidimensional vertical a um lençol do tipo semi-confinado, considerando fases não-miscíveis separadas por uma interface. Para tal, foi analisado o avanço da cunha salina em diferentes planos verticais ao longo da linha da costa.

Em resumo, num problema de intrusão salina, o meio poroso é dividido em duas sub-regiões, uma de água salgada e uma de água doce, para as quais aplica-se a formulação vista anteriormente sobre sub-regiões e contornos móveis.

Num aquífero costeiro, o escoamento pode ser considerado ortogonal à linha de costa, de modo que um modelo vertical bidimensional pode ser usado para analisar o problema da intrusão marinha.

Em aquíferos não confinados, usualmente a superfície freática intercepta a superfície do solo a uma certa altura distância da linha da costa, formando uma superfície de afloramento. Apesar de isto não ser importante em alguns problemas, deve ser levado em consideração para uma modelagem mais realista (Detournay e Strack, 1988).

Na interface são impostas condições para combinar ambas regiões, ou seja, para cada nó da interface entre a água doce e água salgada, as seguintes condições são utilizadas:

- Equilíbrio de pressões em ambos os lados da interface, levando a

$$u_s = \frac{u_f}{\chi} + \frac{\chi - 1}{\chi} y$$

onde $\chi = \rho_f/\rho_s$, ρ é a densidade e o sub-escrito f e s são relacionados a água doce (fresh-water) e água salgada.

- Compatibilidade de fluxos, o que dá (Liggett e Liu, 1983):

$$q_f = -\frac{\chi}{\alpha} q_s$$

onde $\alpha = \mu_f/\mu_s$ e μ viscosidade dinâmica.

Detournay e Strack (1988) desenvolveram uma técnica aproximada analítica utilizando o método do hodógrafo para análise de intrusão marinha. Uma formulação do MEC foi aplicada a um dos problemas, no qual a declividade da superfície de afloramento é de 30°. O problema foi ligeiramente modificado truncando o domínio na profundidade $y = -8$ com a consideração de base impermeável do aquífero.

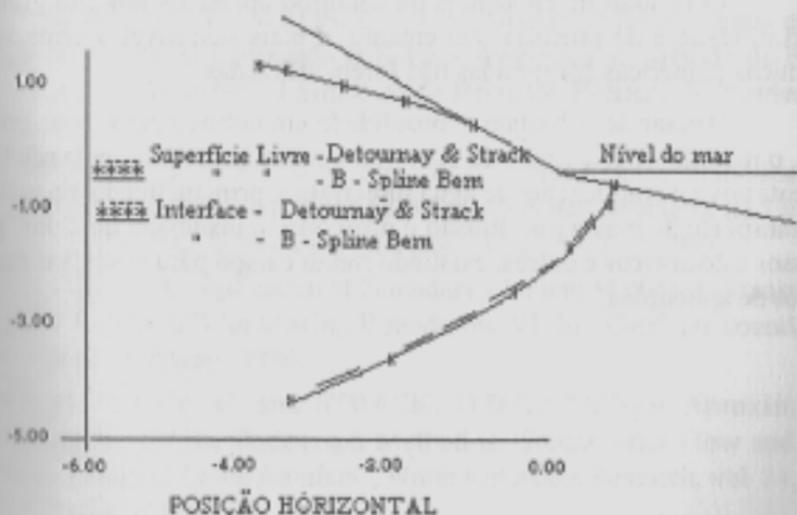


Figura 6. Intrusão marinha

Outras características do aquífero são: condutividade hidráulica $K = 40$ m/dia, fluxo total de água doce por unidade de largura normal ao plano de escoamento $Q = 40$ m²/dia, densidade de água doce $\rho_f = 1000$ Kg/m³, densidade da água salgada $\rho_s = 1400$ Kg/m³ (similar à do Mar Morto), declividade do fundo do mar $\sigma_2 = 15^\circ$. A figura 6 mostra que as superfícies de afloramento e de descarga obtidas pelas duas análises são praticamente iguais, e uma boa concordância também é obtida para a superfície freática e para interface. No pé da interface ocorreu uma diferença ligeiramente maior devido ao truncamento adotado na profundidade de 8m.

9. COMENTÁRIOS FINAIS

A divisão em sub-regiões descrita anteriormente também pode ser aplicada quando o problema apresenta geometria complicada ou para evitar problemas numéricos no caso de domínio longo e estreito.

Como foi previamente citado, no caso de um aquífero extremamente heterogêneo é preferível usar o método de elementos finitos, já que seria trabalhoso dividir a região em inúmeras sub-regiões.

No entanto, se determinado aquífero apresenta uma parte homogênea e outra com muitas heterogeneidades, é possível aplicar elementos de contorno a esta parte maior e acoplar um modelo em elementos finitos para a região com muita heterogeneidade.

O método de elementos de contorno apresenta um alto grau de versatilidade e de precisão. No entanto, é mais suscetível a erros se as técnicas numéricas apropriadas não forem utilizadas.

Apesar de já bastante consolidado em outros ramos de engenharia, o método de elementos de contorno ainda é uma ferramenta relativamente nova nas aplicações de água subterrânea, principalmente no tocante a transporte de massa por difusão e dispersão, transmissão de calor, processos estocásticos e outros, existindo muito campo para pesquisas nestes tipos de aplicações.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. London, Halstead Press, New York - 1978.
2. BREBBIA, C. A. and DOMINGUEZ, J.: Boundary Elements - An Introductory Course - Mc Graw-Hill / Computational Mechanics - 1989.
3. BREBBIA, C. A., TELLES, J. C. F., WROBEL, L. C.: Boundary Element Techniques-Springer Verlag - Berlin, 1984.
4. BREBBIA, C. A. - The Boundary Element Method for Engineers-Pentech Press, BREBBIA, C. A., WALKER, S.: Boundary Element Techniques in Engineering - Newnes - Butterworths - 1980 - London.
5. BRUCH, E., GRILLI, S.: Computation of the Transient Seepage Problem in Anisotropic Porous Media by the Boundary Element Methods. - 1987.
6. BRUCH, E., GRILLI, S. and LEVEUNE, A. : Computation of the Fluid Flow in Zoned Anisotropic Porous Media and Determination of The Free Surface Seepage. Boundary Elements - VIII International Conference - 1986.
7. CABRAL, J. J. S. P. e CIRILLO, J. A.: Salt-Water- Fresh-Water Interface Motion in Leaky Aquifers- Boundary Element Techniques: Applications in Fluid Flow and Computational Aspects. Computational Mechanics Publications, Southampton - U.K, 1987.
8. CABRAL, J.J.S.P e WROBEL, L.C.: "Análise de Escoamentos com Fronteira Móvel Utilizando B-Splines Associado ao Método de Elementos de Contorno". I Simpósio de Recursos Hídricos do Nordeste, Recife, 1992.
9. CABRAL, J. J. S. P. e WROBEL, L. C.: Uma Análise Numérica da Intrusão Salina em Aquíferos Costeiros- Revista Brasileira de Engenharia, Caderno de Recursos Hídricos - VOL. 3 - n° 2- 1985.
10. CHANG, C. S.: Application of Boundary Element Method in Transient Flow Problems With Moving Boundaries. VII Int. Conf. on Boundary Element Methods - 1986.
11. DETOURNAY, C. and STRACK, O.D.L.: "A New Aproximate Technique for the Hodograph Method in Groundwater Flow and its Application to Coastal Aquifers", Water Resources Research, vol. 24, pp 1471-1481, 1988.
12. GIPSON, G. S.: "Boundary Elements Fundamentals", Computational Mechanics, Southampton, 1987.

13. KEMBLAWSKY, M.: A Review of Boundary Element Models of Saltwater Intrusion - Topics in Boundary Elem. Research - Vol 4. Springer Verlag - 1987.
14. LIGGETT, J. A. and LIV, P. L. F.: The Boundary Integral Equation Method for Porous Media Flow - George Allen & Unwin - London - 1983.
15. LIGGETT, J. A.: "Location of Free Surface in Porous Media" - Journal of Hydraulics Division, ASCE, v. 603, pag 353, 1977.
16. LIU, Z. K., BREBBIA, C. A. and APEY, R. A.: Calculation of Free Surface Seepage Through Zoned Anisotropic Dams. VII International Conference on Boundary Element, 1985.
17. WROBEL, L. C., BREBBIA, C. A.: Time Dependent Potential Problems: Progress in Boundary Elements Methods - Ed. by BREBBIA, C. A. - 1981 - vol. 1 - chapt 6- pag 192 - 202.
18. WROBEL, L. C., BREBBIA, C. A. and NARDINI, D.: The Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Transient Heat Conduction - VI International Conference on Finit Elements in Water Resources, Lisbon, 1986.