

# MODELAGEM MATEMÁTICA COMPUTACIONAL PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PROBLEMAS DE FLUXOS EM MEIOS POROSOS

Júlio C. Jesus<sup>1</sup> & Luzimário Lima Pereira<sup>2</sup>

**Resumo** - O Método dos Elementos de Contorno aplicado a um meio homogêneo transforma a equação diferencial que rege o fenômeno numa equação Integral de contorno. A discretização geométrica e as aproximações funcionais são feitas apenas no contorno da região, ao contrário do que ocorre nos métodos de domínio onde todo o domínio deve ser discretizado (mesmo quando o meio é homogêneo). No caso de regiões compostas de sub-regiões homogêneas, aplica-se o método dos elementos de contorno a cada sub-região homogênea. A técnica de sub-regiões resolve o problema de valor de contorno impondo condições de compatibilidade entre as diversas sub-regiões nas interfaces (mesmo potencial e fluxos normais opostos). O presente trabalho apresenta uma nova forma de implementação computacional do Método dos Elementos de Contorno para a solução da equação de Laplace em meios setorialmente homogêneos utilizando a técnica da Sub-Regiões com elementos constantes. O problema é organizado usando os seguintes objetos: sub-regiões, arcos, elementos e nós. Os coeficientes de influência das matrizes G e H são gerados por colunas e essas são diretamente posicionadas na matriz A dos sistema ou acumulados no vetor de termos independentes. São apresentados resultados para várias simulações que demonstram a nova maneira de discretização e resultados obtidos.

**Abstract** - The Boundary Element Method when applied to the homogeneous mean transforms the differential equation that governs the phenomenon in a of Boundary Integral Equation. The geometric discretized and functional approaches is made just in boundary the region, unlike than it happens in domain methods where the whole domain should be discretezed (same when the mean is homogeneous). In case regions composed of homogeneous sub-areas, the boundary element mehod is applied to each homogeneous sub-area . The sub-areas technical solves the problem of boundary value imposing compatibility conditions among the several sub-areas in the interfaces (same potential and opposed normal flows).

<sup>1</sup> Professor Adjunto do Departamento de Engenharia da UFBA, Rua Rubens de Oliveira 483 cep 44380000 Cruz das Almas (BA) fone 75 621 1781

<sup>2</sup> Estudante de Graduação de Agronomia da UFBA, Campus Universitário - Cruz das Almas (BA)

The present work presents the new form of computational implementation of the Boundary Element Method to the of Laplace equation solution in partiality homogeneous means using the technique of the Sub-areas with constants elements. The problem is organized using the following objects: sub-areas, arches, elements and nodes. The coefficients of influence of the G and H matrixes are generated by columns and those are positioned directly in of the system matrix or accumulated in the vector of independent terms. They are presented results goes several simulations that demonstrate the new discretized way and obtained results.

**Palavras-Chave** - Elementos de Contorno, Sub-regiões, Percolação .

## INTRODUÇÃO

A técnica da Sub-Região consiste em se discretizar o contorno de cada região separadamente, e sua interface a partir das condições de continuidade e equilíbrio. No caso de regiões compostas de sub-regiões homogêneas, aplica-se o método dos elementos de contorno a cada sub-região homogênea. A técnica de sub-regiões resolve o problema de valor de contorno impondo condições de compatibilidade entre as diversas sub-regiões nas interfaces (mesmo potencial e fluxos normais opostos).

O presente trabalho apresenta uma nova forma de implementação computacional do Método dos Elementos de Contorno para a solução da equação de Laplace em meios setorialmente homogêneos utilizando a técnica da Sub-Regiões com elementos constantes.

Uma estratégia de orientação a objetos é utilizada na decomposição do domínio do fluxo. O problema é organizado usando os seguintes objetos: sub-regiões, arcos, elementos e nós. As aproximações geométricas e das funções (discretização em elementos de contorno) são feitas para cada arco (que possui como propriedades seu número de identificação global e o número total de elementos no arco). Cada sub-região é definida a partir dos arcos orientados que definem o seu contorno. Os arcos por sua vez, são definidos e identificados globalmente.

Desenvolvemos um Programa em linguagem FORTRAN aglutinando todas essas inovações, que mantém um aparente estreitamento com o Método dos Elementos Finitos, possibilitando simular fluxos em meios porosos.

## EQUAÇÃO GOVERNANTE

A equação que governa o fenômeno de percolação de água em meios porosos em regime permanente é dada pela equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

## MÉTODOS NUMÉRICOS

### Equação integral de Contorno

A solução da equação de Laplace num domínio  $\Omega$  equação (1), submetido a condições de contorno simples do tipo:

$$u(x) = \bar{u}(x) \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2)$$

$$p = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{p} \quad \text{em } \Gamma_p \quad (3)$$

é dada pela equação integral de contorno na forma de Equação (4) à qual permite calcular as incógnitas  $u$  e  $p$  no contorno.

$$c(\xi) u(\xi) = \int_{\Gamma} p(x) u^*(\xi; x) d\Gamma - \int_{\Gamma} u(x) p^*(\xi; x) d\Gamma(x) \quad (4)$$

O valor do potencial em um ponto interno  $\xi$  pode ser calculado aplicando-se a Equação (5) desde que os valores das incógnitas no contorno  $u$  e  $p$  sejam conhecidos.

$$u(\xi) = - \int_{\Gamma} u(x) p^*(\xi; x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} p(x) u^*(\xi; x) d\Gamma(x) \quad (5)$$

As velocidades nos pontos internos nas direções dos eixos x e y podem ser obtidas a partir da lei de Darcy, e escreve-se como

$$q_x = -K \left( \int_{\Gamma} p(x) \frac{\partial u^*(\xi; x)}{\partial \xi_x} d\Gamma - \int_{\Gamma} u(x) \frac{\partial p^*(\xi; x)}{\partial \xi_x} d\Gamma(x) \right) \quad (6)$$

$$q_y = -K \left( \int_{\Gamma} p(x) \frac{\partial u^*(\xi; x)}{\partial \xi_y} d\Gamma - \int_{\Gamma} u(x) \frac{\partial p^*(\xi; x)}{\partial \xi_y} d\Gamma(x) \right) \quad (7)$$

## Métodos dos Elementos de Contorno aplicado a Sub-Regiões

Caso o fluxo se processe em um meio que é homogêneo apenas por partes, a formulação matemática descrita anteriormente na secção retro pode ser aplicada a cada sub-região homogênea como se ela fosse independente das demais.

Para cada sub-região pode-se calcular os coeficientes de influência  $H_{ij}$  e  $G_{ij}$  e montar um sistema de equações.

É importante observar que a solução para cada sub-região porém, não pode ser obtida isoladamente, uma vez que, nas interfaces, tanto  $u$  quanto  $p$  são desconhecidos e portanto incógnitas. Ao se introduzir duas relações extras por nó de interface permite levantar a indeterminação dos sistemas; estas relações são denominadas de condição de compatibilidade e condição de equilíbrio e levam a um sistema de equações para toda a região que, ao invés de ser cheio, passa a ser bloqueado.

Para se ter uma noção deste processo, considere inicialmente, uma região  $\Omega$  composta de duas sub-regiões  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  de contornos externos  $\Gamma_{11}$  e  $\Gamma_{22}$ , respectivamente, e interfaces  $\Gamma_{12}$  ( $\Gamma_{21}$ ), como apresentado na figura (1)

Para a sub-região  $\Omega_1$  define-se

$\{u_{11}\}, \{p_{11}\}$  : Vetores que contém potencial e sua derivada normal, respectivamente, nos nós funcionais do contorno externo  $\Gamma_{11}$ .

$\{u_{12}\}, \{p_{12}\}$  : Vetores que contém o potencial e sua derivada normal nos nós funcionais do contorno de interface  $\Gamma_{12}$  considerando este como pertencente à sub-região  $\Omega_1$ .

Desse modo pode-se escrever a equação integral de contorno dada pela Eq. (4) para os nós funcionais dos contorno  $(\Gamma_{11} + \Gamma_{12})$  e assim obter o seguinte sistema de equações discreto:

$$\begin{bmatrix} [H_{11}] & [H_{12}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_{11}\} \\ \{u_{12}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_{11}] & [G_{12}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{p_{11}\} \\ \{p_{12}\} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

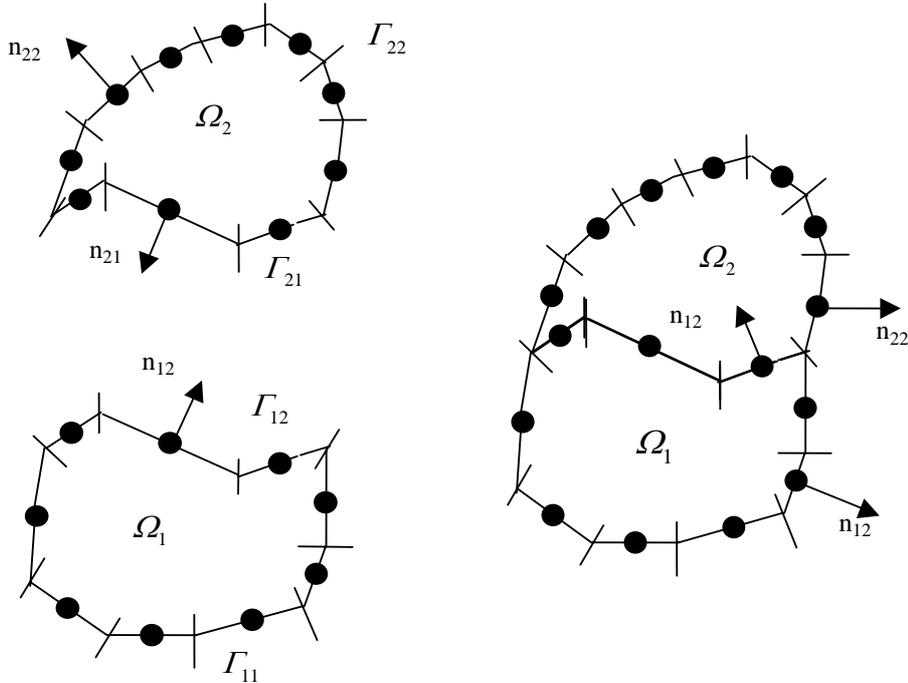
Pode-se definir de maneira análoga para a sub-região  $\Omega_2$ :

$\{u_{22}\}, \{p_{22}\}$  : Vetores que contém potencial e sua derivada normal nos nós funcionais do contorno externo  $\Gamma_{22}$  respectivamente.

$\{u_{21}\}, \{p_{21}\}$  : Vetores que contém o potencial e sua derivada normal nos nós funcionais do contorno de interface  $\Gamma_{21}$  considerando este como pertencente à sub-região  $\Omega_2$  respectivamente.

Desse modo pode-se escrever a equação integral de contorno dada por (4) para os nós funcionais dos contornos  $(\Gamma_{22} + T_{12})$  e assim obter o seguinte sistema de equações discreto:

$$\begin{bmatrix} [H_{22}] & [H_{21}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_{22}\} \\ \{u_{21}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_{22}] & [G_{21}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{p_{22}\} \\ \{p_{21}\} \end{Bmatrix} \quad (9)$$



**Figura 1** - Domínio setorialmente homogêneo composto de 02 sub-regiões homogêneas.

Supondo um contato perfeito entre as sub-regiões  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , na interface  $\Gamma_{12}$ , podemos escrever as condições de acoplamento:

$$\{u_{12}\} = \{u_{21}\} \quad (\text{compatibilidade}) \quad (10)$$

$$\{q_{12}\} = -\{q_{21}\} \quad (\text{equilíbrio}) \quad (11)$$

Levando em consideração a equação de equilíbrio dada por (12) pode-se escrever

$$q_{12} = -K_1 p_{12} \quad (12)$$

$$q_{21} = -K_2 p_{21}$$

$$p_{12} = -\frac{K_2}{K_1} p_{21} \quad (13)$$

Levando em conta as condições de interface dadas pelas equações (10) e (11) pode-se combinar as equações matriciais (8) e (9) , obtendo um sistema acoplado conforme a seguir

$$\begin{bmatrix} [H_{11}] & [H_{12}] & [0] \\ [0] & [H_{21}] & [H_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_{11}\} \\ \{u_{12}\} \\ \{u_{22}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_{11}] & [G_{12}] & [0] \\ [0] & -\frac{K_1}{K_2}[G_{21}] & [G_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{p_{11}\} \\ \{p_{12}\} \\ \{p_{22}\} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Conforme as condições de contorno impostas, as colunas com as submatrizes correspondentes aos contornos externos  $\Gamma_{11}$  e  $\Gamma_{22}$  podem trocar suas posições (juntamente com o sinal), como no problema de fluxo em uma região homogênea.

O sistema dessa forma reordenado pode ser escrito como  $[H] \{U\}=[G] \{P\}$ , mas a matriz do sistema deixa de ser cheia e tanto u quanto p nas interfaces são incógnitas, devendo ser transportado para o lado esquerdo da equação do sistema conforme a seguir

$$\begin{bmatrix} [H_{11}] & [H_{12}] & [G_{12}] & [0] \\ [0] & [H_{21}] & \frac{K_1}{K_2}[G_{21}] & [G_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_{11}\} \\ \{u_{12}\} \\ \{p_{12}\} \\ \{p_{22}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_{11}] & [0] \\ [0] & [G_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{11} \\ p_{22} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{22} & \Gamma_{11} & \Gamma_{22} \end{matrix}$

### Detalhamento da Implementação Computacional

A idéia inicial que norteou este projeto foi considerar os arcos que compõem os contornos externos e internos das sub-regiões (meios setorialmente homogêneos) como livres e independentes das sub-regiões na qual se localizem. Eles serão identificados por um número que lhes serão atribuídos.

De maneira similar ao que se faz no Método dos Elementos Finitos quando um elemento é reconhecido através das conectividades de seus nós, associamos aos arcos um número que obedece à seguinte convenção: Dentro de cada sub-região os arcos são percorridos no sentido anti-horário. Naturalmente, a primeira sub-região terá seus arcos com números positivos. Aos arcos interfaces quando considerados pertencentes à segunda sub-região são percorridos no sentido contrário ao arbitrado como positivo e recebem o mesmo número atribuído na primeira multiplicado por  $-1$ . Dessa forma tem-se a identificação de cada sub-região por um conjunto de números ordenados que constituem suas conectividades

## RESULTADOS

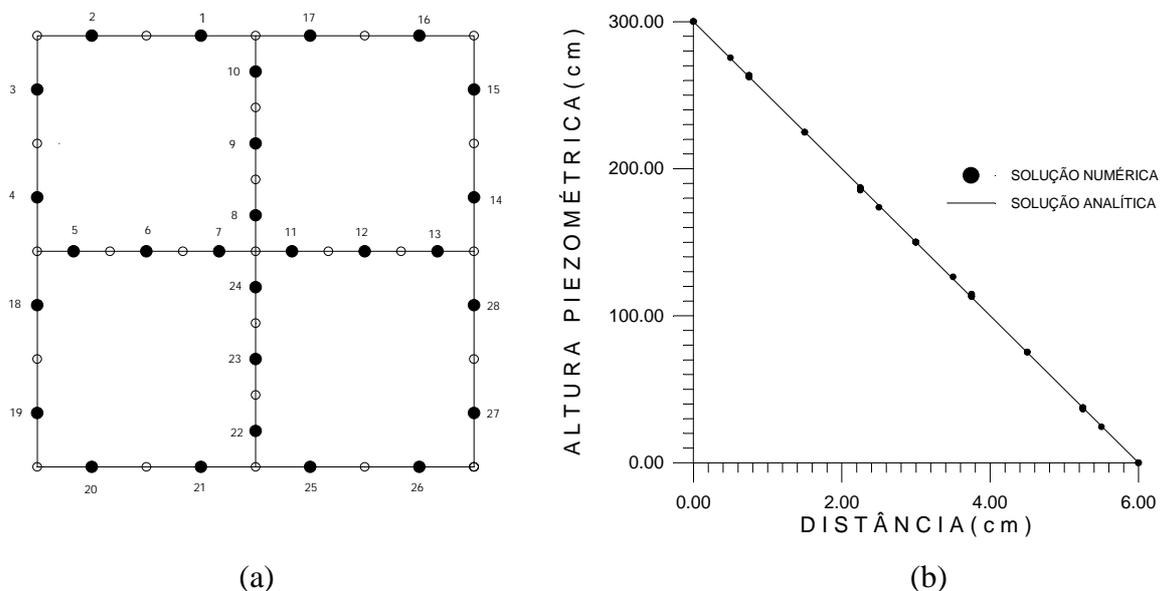
A formulação matemática apresentada foi aplicada a alguns exemplos de fluxos em meios porosos bidimensionais, setorialmente homogêneos, gerando as simulações numéricas pelo Método dos Elementos de Contorno, utilizando elementos retilíneos e constantes. A origem do sistema de eixos cartesianos coincide com o ângulo reto inferior esquerdo da figura 2.(a). O eixo x tem orientação positiva para direita e o eixo y para cima.

Exemplo 1 - Para estudar este exemplo, tomemos uma região quadrada de lado  $L=6,0$  cm, discretizada em 04 sub-regiões, conforme descrito pela figura 2., com coeficientes de permeabilidades  $K_1=K_2=K_3=K_4=1,0$ . As condições de contorno prescritas para o problema é uma carga hidráulica  $U=300,0$  cm na face vertical esquerda e  $U=0,0$  cm na face vertical direita. Os contornos externos foram discretizados com 04 elementos constantes e as interfaces com 03 conforme fig.2(a). A solução analítica é dada por  $u=300-50x$ .

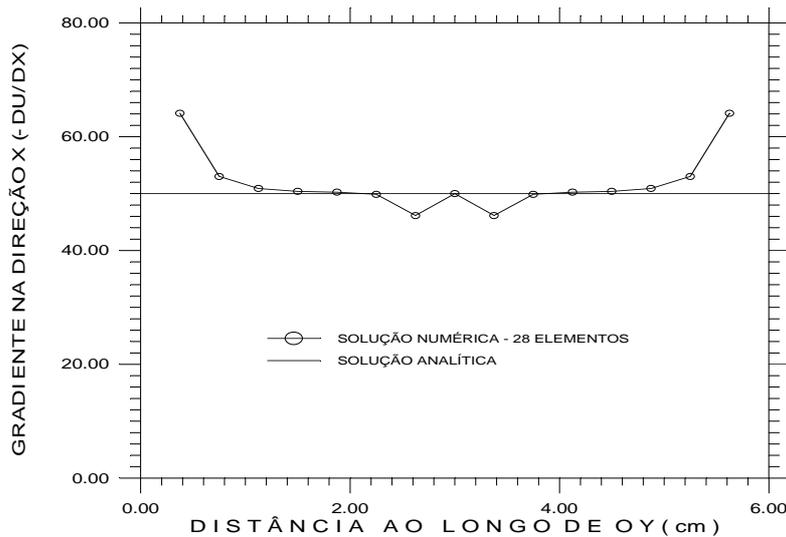
Os resultados podem ser vistos nas figuras 2(b) para variação do potencial com a distância x, e figura 3 para variação da componente x do gradiente com a distância  $oy$ .

Podemos observar na figura 2(b) que os valores de potenciais coincidem com os valores da solução analítica.

Analisando os resultados obtidos na figura 3 observamos que ao introduzirmos aproximações no domínio o fluxo na direção x apresenta oscilações próximas a contornos de interface. Um melhor refinamento da malha conduzirá a melhores resultados.

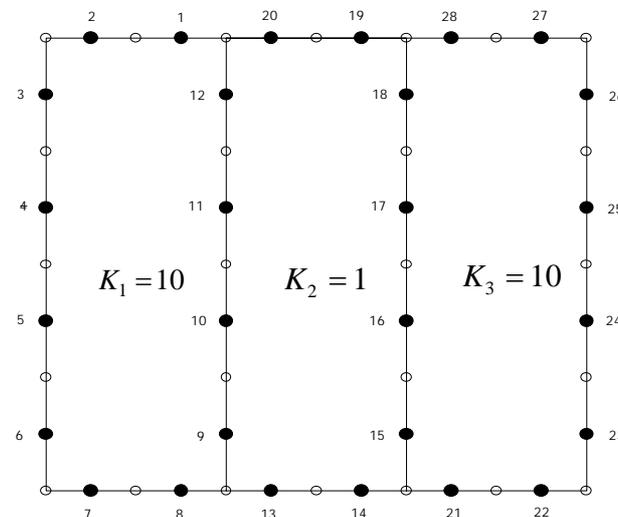


**Figura 2** - Simulação de percolação em região quadrada. (a) Malha discretizada em 04 sub-regiões e 28 elementos constantes. (b) Variação de potenciais ao longo de ox.

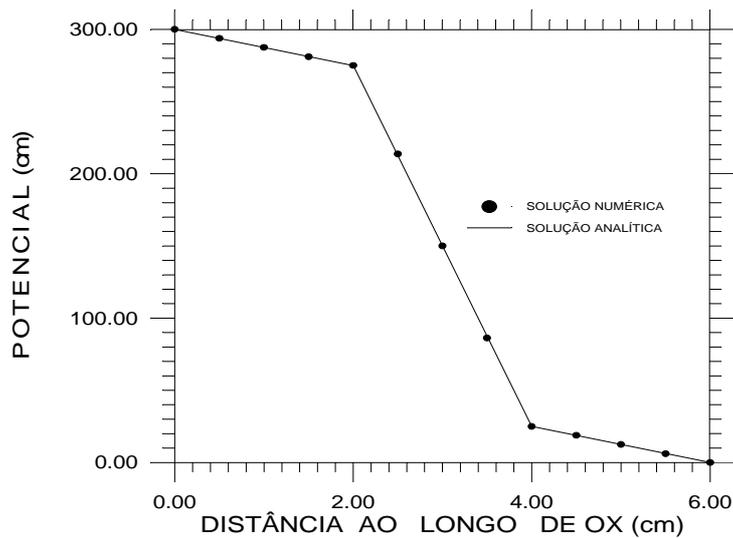


**Figura 3** – Variação do gradiente na direção x ao longo de oy numa seção em  $x=1,5$  cm, 04 sub-regiões e 28 elementos.

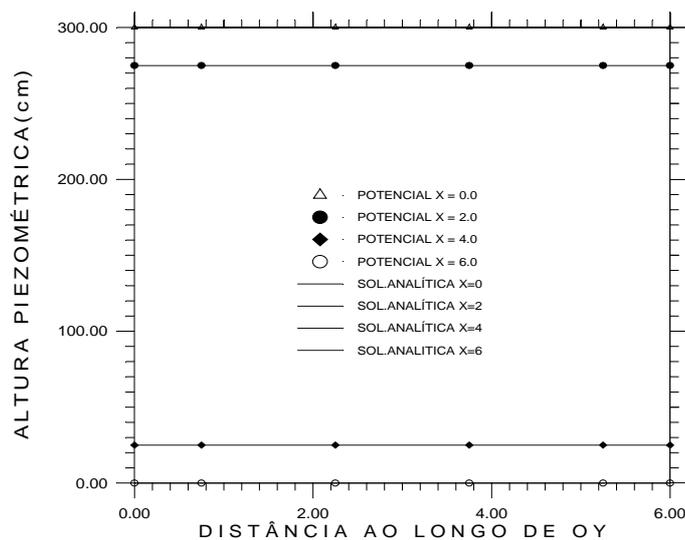
(Exemplo 2) - Neste exemplo tomou-se a mesma região do exemplo 1 submetida às mesmas condições de contorno. Agora os contornos externos e interfaces foram discretizados em 28 elementos constantes e 28 nós funcionais, conforme pode ser visto na figura 4., supondo-se a existência de 03 sub-regiões com permeabilidades  $K_1=10$ ,  $K_2=1$  e  $K_3=10$  cm/hora, que poderia ser areias de média permeabilidade. A origem do sistema de eixos cartesianos coincide com o ângulo reto inferior esquerdo da figura 4. O eixo x tem orientação positiva para direita e o eixo y para cima. Na figura 5 apresentamos os perfis de distribuição de alturas piezométricas ao longo do eixo ox. Apresentamos na figura 6 a descrição das alturas piezométricas obtidos nas seções verticais ao longo de oy, localizadas em  $x=0.0, 2.0, 4.0, 6.0$ . Em ambas figuras pode-se perceber a virtual coincidência entre as curvas da solução numérica e da solução analítica.



**Figura 4** – Simulação de percolação em 03 sub-regiões com diferentes coeficientes de permeabilidade.



**Figura 5** – Distribuição de cotas piezométricas ao longo do eixo ox, 03 sub-regiões e 28 elementos constantes.



**Figura 6** – Variação de potenciais de cotas piezométricas ao longo de oy em seções verticais.

## CONCLUSÃO

A formulação matemática descrita adotando-se elementos constantes, aplicada à técnica da sub-região, quando implementada, possibilita estudar problemas que ocorrem em meios heterogêneos e isotrópicos.

Analisando-se os resultados obtidos, concluímos que a utilização de elementos constantes com sub-regiões logra bons resultados do fenômeno em estudo, e se o número de sub-regiões não é muito elevado torna-se bastante adequado.

A vantagem de se usar uma discretização orientada a objetos em Método dos Elementos de Contorno com sub-regiões, é que a implementação se torna mais flexível, bem didática, facilita o entendimento e a arte de programar, constituindo-se num instrumento extremamente acessível aos pesquisadores.

## **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- [1] AZEVEDO, J.P.S,1985, Análise de Problemas Não Lineares de Transferência de Calor pelo Método dos Elementos de Contorno, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- [2] BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F. and WROBEL, L.C., 1984, Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering, Springer-Verlag, Berlin.
- [3] BREBBIA, C.A., Telles, J.C.F e, Wrobel, L.C.,1984, Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering, Springer-Verlag.
- [4] SAMPAIO, W.B, 1997, Simulação Computacional de Percolação em Regiões Homogêneas por Partes Com o Uso de Elementos de Contorno Descontínuos, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- [5] MANSUR, W. J., PRODANOFF, J.H.A, e AZEVEDO, J.P.S., 1996, “Método dos Elementos de Contorno”. Em: Silva, R.V., Métodos Numéricos em Recursos Hídricos II, 2 ed., capítulo 1, Associação Brasileira de Recursos Hídricos , Porto Alegre.