

# POSIÇÃO DA INTERFACE ENTRE ÁGUA SALGADA E ÁGUA DOCE, UMA ANÁLISE NUMÉRICA PELO MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO

POR

J.J.S.P. CABRAL (\*)

RESUMO-- O presente trabalho apresenta uma análise numérica de posição da interface entre água doce e água salgada, utilizando o método numérico dos elementos de contorno para achar a solução das equações diferenciais do escoamento em meios porosos. Foi feita uma análise numérica da posição da interface para duas situações distintas: na primeira a interface em forma de cunha, desloca-se horizontalmente devido ao avanço da água do mar (intrusão marinha); na segunda a interface inicialmente horizontal, desloca-se verticalmente devido a recarga do aquífero ou a exploração da água subterrânea. São apresentados os resultados de quatro aplicações: a segregação por ação da gravidade num modelo com dois líquidos imiscíveis; a intrusão marinha causada pela diminuição da vazão de recarga; a intrusão em direção a uma captação de água do lençol subterrâneo, e a sobrelevação da interface em direção a um dreno horizontal.

## INTRODUÇÃO

Na realidade a região de contato entre a água doce e água salgada é constituída por uma zona de difusão em que o teor de salinidade varia gradativamente, de um valor mínimo junto a água doce até um valor máximo na faixa da água salgada. No entanto, em muitos casos, a espessura da zona de transição é pequena em comparação com as dimensões do aquífero, o que permite a consideração da existência de uma "interface abrupta" de separação entre as duas fases.

Devido a variação das vazões naturais de recarga do aquífero ou devido a bombeamento para utilização da água do lençol, o equilíbrio hidrodinâmico se altera e as massas de água se movimentam, tendendo a atingir uma nova posição de equilíbrio.

Apesar de alguns países como Estados Unidos, Holanda e Israel virem estudando a intrusão há várias décadas, no Brasil o assunto ainda não tem sido muito pesquisado. No entanto alguns

---

(\*) Professor, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE.

estudos vêm sendo realizados por instituições como o IPT, a CPRM e o DAEE. Em Pernambuco a COMPESA já tem um cadastramento dos poços perfurados e das características do aquífero Beberibe na região metropolitana do grande Recife e está sendo estudada a possibilidade de aplicação deste modelo ao acompanhamento da posição da cunha salina.

No estudo do comportamento da cunha de água salina têm sido utilizados modelos físicos, gráficos, analíticos e numéricos para determinar a posição da interface sob condições específicas, bem como prever as consequências sofridas pela interface devido a exploração da água subterrânea.

Modelos físicos foram usados inicialmente por Bear e Dagan (1964) utilizando célula de Hele-Shaw, com resultados muito bons.

Em relação aos métodos numéricos, diversos trabalhos têm sido feitos, alguns utilizando diferenças finitas como Pinder e Cooper (1970), Shamir e Dagan (1971) e Polo e Ramis (1983); algumas contribuições utilizando elementos de contorno por Liggett, Liu e Lee (1981) e Kemblowsky (1985); e algumas contribuições utilizando elementos finitos, entre elas Lee e Cheng (1974) e Sá da Costa (83).

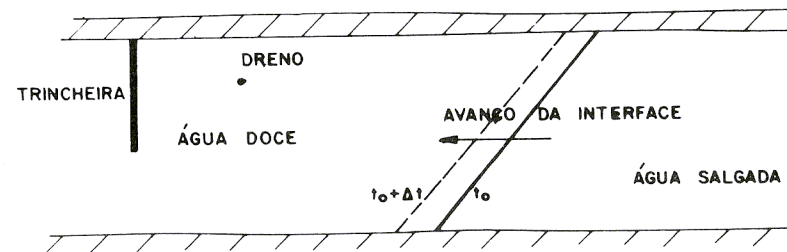
O objetivo do presente trabalho é localizar a posição da interface para diversas taxas de recarga e bombeamento ao longo do tempo, com condições determinadas de viscosidade, porosidade, massa específica e permeabilidade.

Foi feita a consideração de uma interface abrupta, ou seja, despreza-se os efeitos da dispersão. Foi adotada a lei de Darcy, já que as condições de escoamento no meio poroso do aquífero, confirmam a validade da mesma. Não foi feito uso da aproximação de Dupuit.

Considerou-se o meio poroso como indeformável, com porosidade de constante no tempo, as duas fases líquidas do problema como sendo homogêneas, isotrópicas e enchendo completamente todos os poros da zona saturada do meio poroso e o escoamento incompressível.

A equação do aquífero passa a ser, então, a equação de Poisson, para o caso em que existe bombeamento ou recarga através de trincheiras ou drenos e se reduz à equação de Laplace para o caso dos elementos acima apresentarem vazões nulas.

O problema do deslocamento da interface é resolvido através de uma sucessão de estágios, onde cada estágio é analisado como sendo em regime permanente. Cada situação estacionária é resolvida através do método dos elementos de contorno, enquanto a transição de um estágio para outro é feita por diferenças finitas, por um método implícito.



PLANO VERTICAL PERPENDICULAR A LINHA DA COSTA  
FIG. 1-AVANÇO DA INTERFACE NA DIREÇÃO HORIZONTAL.

Para o estudo do deslocamento horizontal dos pontos da interface, utilizou-se a análise numérica num plano vertical, perpendicular a linha da costa (fig. 1), considerando-se que as características do aquífero permanecem constantes ao longo de qualquer paralela a costa. Na análise do bombeamento foi considerado o caso de trincheiras e de drenos horizontais paralelos a costa. No caso de poços pode ser feita uma aproximação para uma trincheira equivalente.

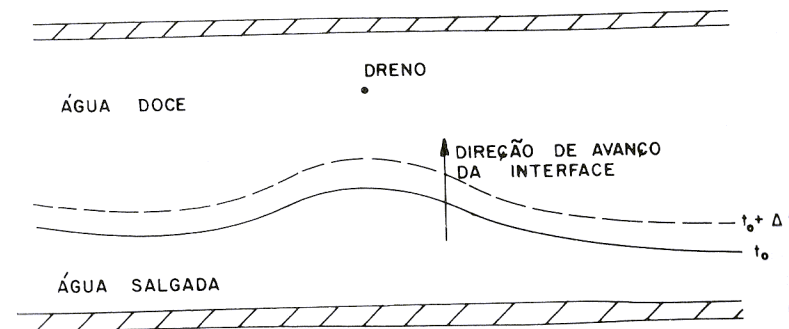


FIG. 2 - PLANO VERTICAL PERPENDICULAR AO DRENO  
PONTOS DA INTERFACE MOVENDO-SE NA VERTICAL.

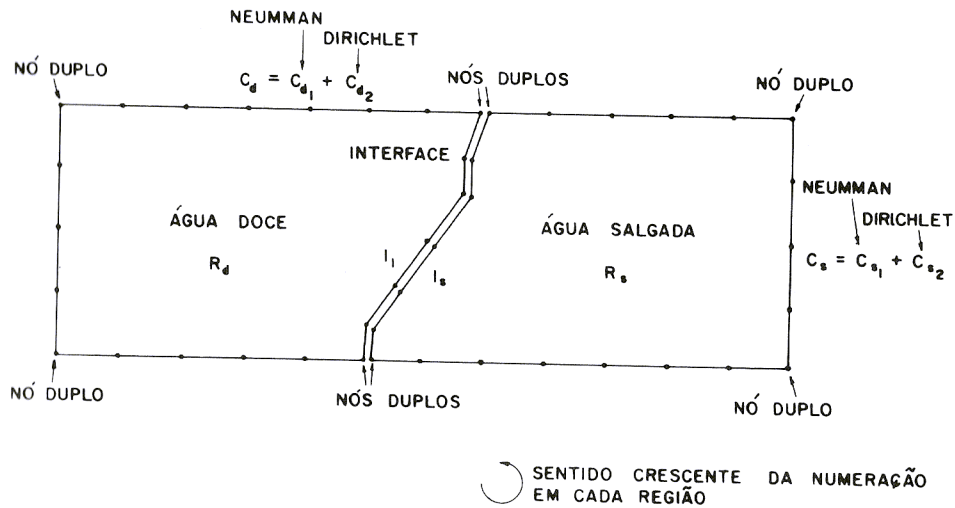


FIG. 3 - DISCRETIZAÇÃO EM ELEMENTOS DE CONTORNO

Para o estudo do deslocamento vertical considerou-se drenos horizontais e a análise numérica foi feita num plano vertical perpendicular ao dreno (fig. 2). Foram analisados apenas drenos de pequeno diâmetro, de modo que sua projeção no plano de estudo se reduz a uma fonte ou sumidouro puntiforme.

#### FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Chamando de  $q$  a descarga específica (vazão por unidade de área) e utilizando a carga piezométrica

$$\phi = z + \frac{p}{\gamma} \quad (1)$$

temos a lei de Darcy para escoamentos homogêneos, incompressíveis, unidimensionais em meios isotrópicos:

$$\vec{q} = -K \text{grad}\phi \quad (2)$$

onde  $K$  é a condutividade hidráulica, também chamada de coeficiente de permeabilidade.

Para um meio poroso indformável, com escoamento permanente e incompressível, temos a equação da continuidade

$$\text{div}(\vec{q}) = 0 \quad (3)$$

Nas condições referidas acima o valor de  $K$  é constante em qualquer direção e, aplicando (2) em (3), teremos a equação de Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (4)$$

Considerando que exista uma fonte ou sumidouro no volume de controle sob observação, a equação (3) não será mais igualada a zero e sim a um termo que traduza a entrada ou saída de massa por unidade de tempo, respectivamente.

Chamando de  $C$  o acréscimo ou decréscimo de volume do fluido, por unidade de tempo e por unidade de volume, a equação (3) será igualada a  $C$  e a equação (4) dará origem a equação de Poisson

$$\nabla^2 \phi - \frac{C}{K} = 0 \quad (5)$$

Precisamos, além disso, de duas equações de compatibilização na interface. Para um ponto da interface a pressão é igual para as duas regiões e aplicando a fórmula da carga piezométrica (1) teremos

$$\phi_s = \frac{\phi_d}{\beta} + \frac{(\beta-1)}{\beta} z \quad (6)$$

onde os índices  $s$  e  $d$  referem-se, respectivamente, a água salgada e a água doce e  $\beta$  é a razão entre as massas específicas,  $\beta = \rho_s / \rho_d$ .

Além da condição de igualdade das pressões citada anteriormente, os pontos da interface devem obedecer a outra condição em relação a derivada da carga piezométrica na direção transversal a interface, o que está associado a vazão, através da lei de Darcy.

Assumindo-se que a interface é uma superfície material, ou seja, composta sempre das mesmas partículas fluidas, sua derivada material é igual a zero



$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla F) = \frac{\partial F}{\partial t} + (q \cdot \nabla F)/n = 0 \quad (7)$$

onde  $F = F(x, z, t)$  é uma função que representa uma superfície material,  $V$  é a velocidade e  $n$  é a porosidade.

Considerando que a posição  $x$  da interface pode ser escrita como função do tempo e da ordenada  $z$

$$x = \lambda(z, t) \quad (8)$$

a função  $F$  anteriormente citada pode ser escrita

$$F(x, z, t) = x - \lambda(z, t) = 0 \quad (9)$$

Aplicando a equação (7) às duas regiões, utilizando a lei de Darcy e fazendo as substituições adequadas, temos:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{K_d}{n} \left[ \frac{\partial \phi_d}{\partial z} \frac{\partial \lambda}{\partial z} - \frac{\partial \phi_d}{\partial x} \right] = \frac{K_s}{n} \left[ \frac{\partial \phi_s}{\partial z} \frac{\partial \lambda}{\partial z} - \frac{\partial \phi_s}{\partial x} \right] \quad (10)$$

Chamando de  $\gamma$  o ângulo entre a interface e a horizontal, conforme indicado na figura 1, substituindo a condutividade hidráulica pela expressão  $k\rho g/\mu$  e fazendo  $\alpha = \mu_s/\mu_d$ , temos (Liggett e Liu (1983))

$$\frac{n\mu_d}{k\rho_d g} \frac{\partial \lambda}{\partial t} = - \frac{1}{\text{sen}\gamma} \frac{\partial \phi_d}{\partial N_d} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{1}{\text{sen}\gamma} \frac{\partial \phi_s}{\partial N_s} \quad (11)$$

onde  $N$  é a direção normal a interface.

Da equação (11) é tirada a segunda equação de compatibilização da interface

$$\frac{\partial \phi_d}{\partial N_d} = - \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial \phi_s}{\partial N_s} \quad (12)$$

a a equação do deslocamento da interface ao longo do tempo

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = - \frac{K_d}{n} \frac{1}{\text{sen}\gamma} \frac{\partial \phi_d}{\partial N_d} \quad (13)$$

#### MÉTODO DE RESOLUÇÃO

Conforme falado anteriormente, cada situação estacionária é resolvida pelo método dos elementos de contorno. Para isto é feita uma discretização do contorno da região, conforme indicado na figura 3. A descrição completa do método encontra-se em Brebbia, Telles, Wrobel (1984).

Em seguida, a equação de transição de um estágio a outro, ao longo do tempo, é feita por diferenças finitas, pelo método implícito.

Da equação (13) obtemos

$$\lambda^{j+1} = \lambda^j - \frac{1}{\text{sen}\gamma^j} \left[ \theta \left[ \frac{\partial \phi_d}{\partial N} \right]^j + (1 - \theta) \left[ \frac{\partial \phi_d}{\partial N} \right]^{j+1} \right] \frac{K}{n} \Delta t \quad (14)$$

Para a aplicação do deslocamento vertical o sinal de subtração logo após  $\lambda^j$  é substituído por um sinal de adição porque neste caso o sentido do avanço da água salgada coincide com o sentido crescente de  $\lambda$ .

#### APLICAÇÕES

##### Segregação por ação da gravidade

Uma das aplicações do modelo desenvolvido foi ao problema de segregação por ação da gravidade, já estudado por diversos autores, entre eles Shamir e Dagan (1971) e Sá da Costa (1983) que adotaram a simplificação de Dupuit, sendo que os primeiros resolveram o problema por diferenças finitas e o último por elementos finitos, e ainda por Liu e Liggett (1981) que utilizaram elementos de contorno.

Nesse problema é analisado um aquífero horizontal, confinado, de espessura constante. No instante inicial existe uma comporta vertical que separa a água doce da água salgada. A comporta é retirada e então a água salgada, por sua densidade maior, inicia um deslocamento em forma de cunha, penetrando pelo aquí-

fero e forçando a água doce para cima.

As camadas que confinam o aquífero são impermeáveis e, considerando-se que não existe recarga lateral, tem-se que todas as condições de contorno são do tipo de Neuman, com  $\partial\phi/\partial n = \underline{z}$ ero.

A diferença de viscosidade entre os dois fluidos foi considerada desprezível, de modo que se usou o mesmo valor da viscosidade para ambos. Os valores dos outros parâmetros utilizados são:

$$\begin{aligned} \theta &= 0,5 & \mu &= 1,2 \times 10^{-3} \text{ g/cm.s} \\ n &= 0,3 & K_d &= 39,024 \text{ m/dia} \\ \rho_d &= 1,0 \text{ g/cm}^3 & K_s &= 40,0 \text{ m/dia} \\ \rho_s &= 1,025 \text{ g/cm}^3 \end{aligned}$$

Como foi falado anteriormente, nesse problema as condições especificadas ao longo de todo o contorno são do tipo de Neuman, ou seja, não foi especificado o valor do potencial para nenhum dos pontos. O problema fica, então, indeterminado já que não existe nenhum potencial de referência. Atribuiu-se então o potencial zero ao ponto médio da interface.

Alguns dos resultados obtidos estão mostrados na figura 4, onde foi desenhada metade da interface, já que existe simetria e é feita a comparação com o modelo de Sá da Costa, que utiliza a aproximação de Dupuit. Observa-se então que a aproximação de Dupuit não é boa para pequenos intervalos de tempo.

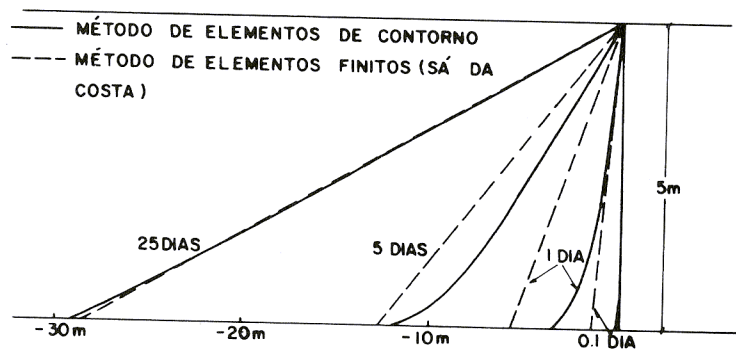


FIG. 4 - COMPARAÇÃO COM SOLUÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS (SÁ DA COSTA) (METADE INFERIOR DA INTERFACE)

Um dos problemas com que se deparou na aplicação do modelo foi a questão da instabilidade dos resultados. Em certos passos da solução do problema se chegava algumas vezes a distorções inadmissíveis, com oscilação dos valores nos passos consecutivos. Verificou-se, através de tentativas, que o problema se devia a variação do valor do intervalo de tempo ( $t$ ) de um estágio a outro. Quando isso ocorreu, foi feita uma redução do valor de  $t$ , e o problema deixou de existir (Cabral (1985)).

#### Intrusão por redução da vazão de recarga

Uma outra aplicação foi a simulação do experimento realizado por Bear e Dagan (1964) numa célula de Hele-Shaw, em que a interface de um aquífero ocupava no instante inicial uma posição estacionária para uma determinada vazão de recarga e que, depois desse instante, a vazão de recarga era bruscamente diminuída. Com isso, havia o movimento da interface em direção à terra.

Bear e Dagan relatam cinco casos diferentes para distintas vazões de recarga antes do tempo inicial ( $t = 0$ ) e depois do tempo inicial ( $t = 0_+$ ). Aqui apresentamos o estudo comparativo apenas para um dos casos, o de número 1.

O experimento representa um aquífero horizontal confinado, recebendo uma vazão de recarga numa das extremidades escoando em direção ao mar onde se encontra uma interface de separação. O trecho superior da região 1, adjacente a ponta da interface, bem como a fronteira superior da região 2, são permeáveis.

Na fase inicial foi utilizada a vazão de recarga de  $19,1 \text{ cm}^2/\text{s}$  (por unidade de comprimento da costa) e na segunda fase foi considerada vazão de recarga nula.

Foram efetuadas as mesmas considerações da aplicação anterior em relação a viscosidade (a mesma para as duas regiões) e aos intervalos de tempo (certo número de passos com intervalos de tempo constante e em seguida intervalos maiores). O fator de ponderação foi utilizado também igual a 0,5, e adotou-se os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned} n &= 0,3 & \mu &= 1,2 \times 10^{-4} \text{ g/cm.s} \\ \rho_d &= 1,0 \text{ g/cm}^3 & K &= 69,0 \text{ cm/s} \\ \rho_s &= 1,029 \text{ g/cm}^3 \end{aligned}$$

O experimento de Bear e Dagan é composto por duas etapas. Na primeira, com a vazão de recarga inicial, o programa é rodado para uma série de passos até chegar a uma configuração estacionária para a interface. Na segunda etapa parte-se da configuração encontrada no item anterior, altera-se a vazão para o no



vo valor desejado e o programa é rodado por mais uma série de passos em que se obtém a nova posição da interface para cada tempo.

A figura 5 apresenta a posição estacionária obtida no final da primeira etapa, indicada por  $t = 0$ , e as posições sucessivas da interface ao longo do tempo, comparadas com os resultados experimentais obtidos por Bear e Dagan.

No caso de ser especificado o potencial junto a ponta da interface ocorre uma singularidade no sistema de equações, que é eliminada impondo-se o valor do potencial especificado para o nó duplo adjacente e o valor da derivada igual a zero.

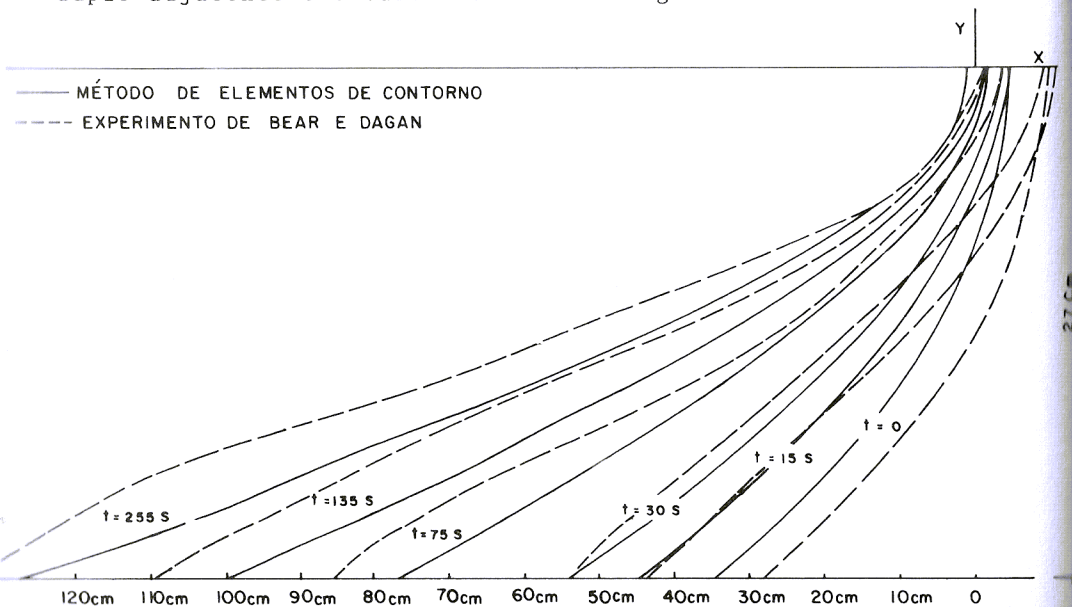


FIG. 5 - SIMULAÇÃO DO EXPERIMENTO DE BEAR E DAGAN. DISCRETIZAÇÃO COM 65 NÓS.

Foi detectado o mesmo problema de instabilidade da aplicação anterior para valores muito grandes do intervalo de tempo.

#### Intrusão em direção a uma captação

Uma terceira aplicação realizada foi o estudo da intrusão em direção a uma captação. Partiu-se de uma posição estacionária da interface com determinada vazão de recarga do aquífero e iniciou-se um bombeamento numa trincheira para se analisar o movimento da interface em direção ao local de bombeamento.

Essa trincheira penetra completamente no aquífero, é escava

da na vertical e ao longo de uma linha paralela a costa. A trincheira pode ser considerada como a simulação de um poço ou de uma bateria de poços paralela a costa.

Foi considerada uma vazão de recarga do aquífero de  $19,1 \text{ cm}^2/\text{s}$  e a vazão de bombeamento na trincheira de  $1,84 \text{ cm}^2/\text{s}$ , ambas por unidade de comprimento da costa. Foi utilizada a altura de 27 cm para o trecho da trincheira que atravessa o aquífero de modo que a vazão  $q$  da equação (16) foi de  $0,068 \text{ cm/s}$ . Os resultados são mostrados na figura 6.

Foram feitas as mesmas considerações anteriores sobre porosidade, viscosidade, massa específica, intervalos de tempo, fator de ponderação e nós duplos.

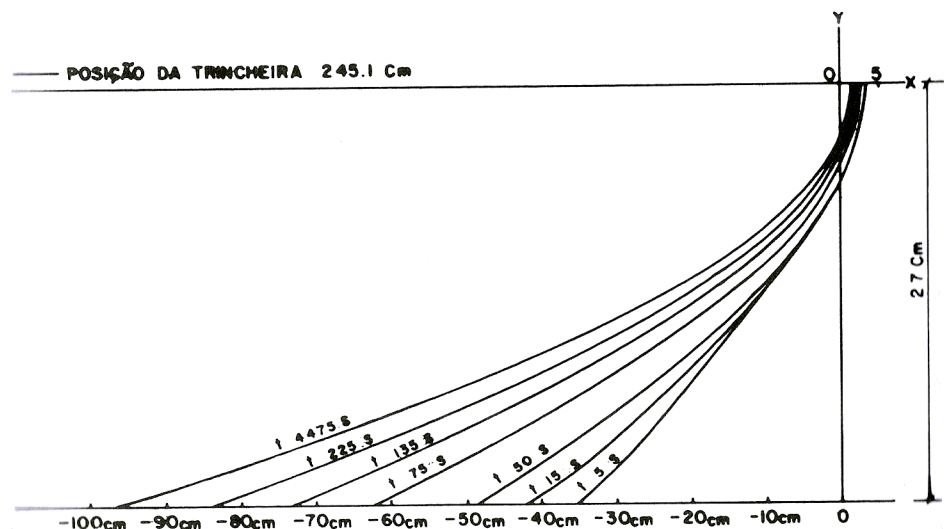


FIG. 6 - INTRUSÃO EM DIREÇÃO A UMA CAPTAÇÃO. DISCRETIZAÇÃO COM 65 NÓS.

#### Hobreelevação em direção a um dreno

Foi feita uma aplicação para o caso dos pontos da interface deslocando-se verticalmente em direção a um dreno horizontal.

De início a interface ocupava uma posição horizontal e devido a vazão retirada pelo dreno passa a haver uma intumescência conforme já indicado na figura 2.

Kemblowsky (1985) relata alguns casos de aplicação deste tipo de movimento da interface num aquífero confinado, no entanto não informa todos os dados utilizados, que foram coletados de um experimento numa célula de Hele-Shaw feito por outro pesquisador.

Foram adotados então os seguintes dados:

massa específica de água doce	=	1,0 g/cm <sup>3</sup>
massa específica da água salgada	=	1,025 g/cm <sup>3</sup>
viscosidade absoluta	=	$1,2 \times 10^{-3}$ g/cm <sup>3</sup>
condutividade hidráulica	=	69,0 cm/s
vazão no dreno	=	0,66 cm <sup>3</sup> /s/cm

Os resultados obtidos estão mostrados na figura 7. Foi detectado também o problema da instabilidade para intervalos de tempo elevados.

### CONCLUSÕES

Analisando os resultados encontrados e comparando com diversos outros obtidos de forma analítica, experimental ou por outros métodos numéricos, pode-se concluir que o modelo utilizado representa bem o problema da intrusão salina nos casos da interface em forma de cunha e no caso da sobre elevação.

O nível de precisão dos resultados é muito bom e o tempo gasto no processamento computacional não é muito elevado, visto que se resolve um sistema de equações com menos incógnitas ao se discretizar apenas o contorno.

A hipótese de Dupuit-Forchheimer apresenta bons resultados no estudo da intrusão salina, para tempos grandes, no entanto não é muito boa para tempos pequenos.

Verificou-se que para intervalos de tempo grandes ocorria uma instabilidade dos resultados, localizada na ponta da interface, que desaparecia ao se reduzir os valores dos intervalos.

Observou-se que era possível reduzir a oscilação dos resultados colocando-se o penúltimo nó da interface o mais próximo possível da ponta.

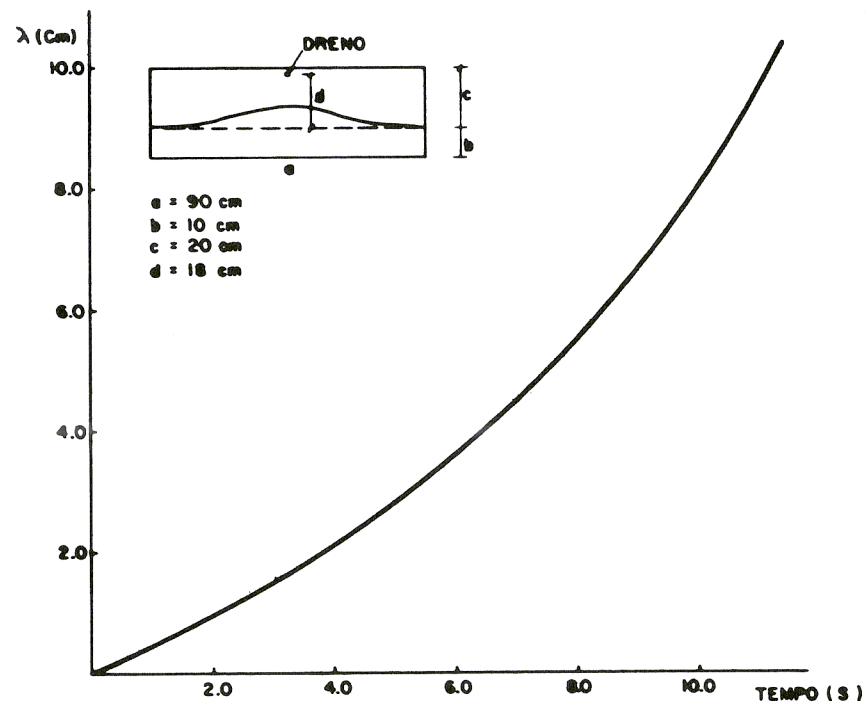


FIG. 7- SOBRELEVÇÃO EM DIREÇÃO A UM DRENO. DESLOCAMENTO DO PONTO MÉDIO DA INTERFACE.

### REFERÊNCIAS

- BEAR, J., e DAGAN, G. (1964), "Moving Interface in Coastal Aquifers", Journal of Hydraulic Division, A.S.C.E., Volume 90, nº 4, pages 193-216.
- BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F., e WROBEL, L. C. (1984), Boundary Element Techniques, Springer-Verlag, Berlin e New York.
- CABRAL, J.J.S.P. (1985), Intrusão Salina em Aquíferos Costeiros: Uma Análise pelo Método de Elementos de Contorno, Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ.
- KEMBLOWSKY, M. (1985), "Salt-Water-Freshwater Transient upconing-an implicit Boundary-element solution, Journal of hydrology,

LIGGETT, J.A., e LIU, P.L.F. (1983), The Boundary Integral  
Equation Method for Porous Media Flow, George Allen &  
Unwin, London.

SÁ DA COSTA, A. (1983), "Modelação Numérica da Intrusão Salina  
em Aquíferos Costeiros", Simpósio Luso-Brasileiro sobre  
Simulação e Modelação em Hidráulica e Recursos Hídricos ,  
Associação Brasileira de Recursos Hídricos, Anais, Volume  
2, páginas 251-283, Blumenau.

SALT-WATER - FRESH WATER INTERFACE. NUMERICAL ANALYSIS  
BY BOUNDARY ELEMENT METHOD

POR

J.J.S.P. CABRAL (\*)

ABSTRACT -- The boundary element method is formulated  
for and applied to problems concerning a moving inter-  
face between fresh water and salt water in porous me-  
dia. The model is applied to four cases: segregation  
by gravity action, intrusion by reduction of recharge  
flow and intrusion into a sink; and shape of the  
rising interface produced by a drain. The results  
obtained by the model are in good agreement with  
analytical and experimental solutions.