

UMA INTRODUÇÃO AOS FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DO MÉTODO DE ELEMENTOS ANALÍTICOS

Carisia Carvalho Gomes¹ & Marco Aurélio Holanda de Castro²

Resumo - Este trabalho tem como objetivo apresentar os princípios matemáticos do Método de Elementos Analíticos com a finalidade de torná-lo mais familiar entre engenheiros e cientistas interessados em modelagem matemática de fluxo hídrico subterrâneo regional. Ele é uma ferramenta de modelagem do fluxo em aquíferos que utiliza o princípio da superposição de funções analíticas para resolver problemas complexos de fluxo, simulando os efeitos causados por cada componente hidrogeológico do aquífero no fluxo da água subterrânea. São descritos os conceitos do método, com uma apresentação dos princípios matemáticos nos quais esta técnica é baseada. Inicia-se com uma descrição geral, citando os tipos de elementos analíticos e a formulação matemática de cada um deles. Este estudo é feito para mostrar que a solução analítica composta, que é uma combinação de numerosas soluções analíticas elementares, satisfaz a equação diferencial do fluxo em qualquer ponto do domínio, tendo como consequência a garantia da continuidade do fluxo.

Abstract – The main objective this work is to present the mathematical principles of the Analytical Elements Method with the purpose to become it more familiar between engineers and scientists interested in mathematical modeling of groundwater flow. This is a modeling tool of aquifer flow that uses the principle of overlapping analytical functions to decide complex problems of flow, simulating the effect caused by each hydrogeologic component in the aquifer groundwater flow. The concepts of the method are described, with a presentation of the mathematical principles in which this technique is based. There is a general description of the method, showing the types of analytical elements and its mathematical formularization. This study it is made to show that the composed analytical solution, that is a combination of numerous elementary analytical solutions, satisfies the flow equation in any point of the domain, giving as consequence the guarantee of the flow continuity.

¹ Depto de Eng. Hidráulica e Ambiental – Universidade Federal do Ceará - Campus do Pici – Centro de Tecnologia – Bloco 713 - 1º andar – CEP - 60.451-970 – Fortaleza – CE – tel.: (085) 288-9621 - fax: (085) 288-9627 carisia@ufc.br

² Depto de Eng. Hidráulica e Ambiental – Universidade Federal do Ceará - Campus do Pici – Centro de Tecnologia – Bloco 713 - 1º andar – CEP - 60.451-970 – Fortaleza – CE – tel.: (085) 288-9776 - fax: (085) 288-9627 marco@ufc.br

Palavras-Chave - água subterrânea; modelagem matemática.

INTRODUÇÃO

O método de elementos analíticos é baseado no princípio da superposição de muitas funções analíticas. Este princípio consiste da adição de soluções individuais para cada elemento, sendo este método considerado como uma poderosa ferramenta para as soluções de problemas de fluxo hídrico subterrâneo para sistemas lineares. A solução do problema é obtida através da adição de todas as influências dos elementos analíticos individuais, representados pelas funções analíticas, que correspondem às características do aquífero [6]. Tradicionalmente, a superposição de funções analíticas foi considerada limitada por ser aplicada apenas a aquíferos homogêneos, isotrópicos e de transmissividade constante. A formulação do problema de fluxo de água subterrânea no modelo analítico é feita em termos de potenciais de descarga ao invés de ser em termos de cargas hidráulicas, esta propriedade o torna adequado tanto para condições de fluxo confinado como para não confinado, como também para aquíferos heterogêneos [14] e [15]. A principal característica deste método é a sua ligação direta entre os componentes do aquífero e as expressões analíticas para as cargas hidráulicas e vazões.

Os elementos analíticos são escolhidos de maneira a melhor representar as características hidrogeológicas do aquífero. Por exemplo, as seções de rios e os contornos de lagos são representados por linhas de perda ou ganho, pequenos lagos ou mangues podem ser representados por áreas de perda ou ganho. As áreas de recarga são modeladas através de distribuições de áreas de ganho (áreas de perda com sinal negativo). Os rios e lagos que não estão completamente conectados com o aquífero são modelados como áreas semipermeáveis. As descontinuidades na espessura do aquífero ou na condutividade hidráulica são modeladas através do uso de linhas de descontinuidades ou linhas duplas. Alguns elementos analíticos específicos podem ser utilizados para representar componentes especiais, tais como drenos, canais, barreiras impermeáveis, etc. Os modelos não são baseados na discretização do domínio, pois não utilizam grades ou malhas com nós para o domínio do fluxo que possa fazer com que a solução seja sensível à escala.

O cálculo da carga hidráulica e do fluxo não necessita de interpolação, de diferenciação numérica e nem de procedimentos similares. Eles são representados por funções contínuas em todos os pontos do domínio. Para ilustrar a correspondência direta entre os elementos analíticos e os componentes do aquífero considere-se o exemplo a seguir: se a condutividade hidráulica no modelo varia de uma célula para outra célula, cada célula irá ser tratada como um elemento analítico, chamado de inomogeneidade.

O método analítico é internamente conservativo de massa, ou seja, o balanço de massa é perfeitamente satisfeito em qualquer modelo estruturado pelo modelo e também oferece alta precisão nos resultados. A determinação precisa das fronteiras entre os componentes geológicos do domínio também não necessita de atenção especial. O modelo é especialmente adequado para fluxo hídrico subterrâneo regional.

Matematicamente, o método não é novo como um todo. Ele pode ser visto como uma variante do método de elementos de contorno [3] que utiliza as funções de Green. No método de elementos de contorno clássico, as funções de Green são distribuídas sobre toda a fronteira do domínio fechado e as integrais associadas são estimadas numericamente. Por outro lado, as funções de Green no método analítico são distribuídas ao longo das fronteiras interiores dentro do domínio infinito e as integrais associadas são estimadas analiticamente. Em essência, o modelo analítico utiliza soluções analíticas para componentes básicos do regime de fluxo subterrâneo e adiciona-os para representar todo o problema de fluxo. O uso de elementos analíticos mais sofisticados e a introdução de condições de contorno mais complicadas levam a procedimentos de solução mais difíceis de calcular que incluem conjunto de equações não lineares e matrizes com coeficientes não quadrados. Entretanto, uma vez que as taxas de infiltração ou extração e os parâmetros de campo desconhecidos são encontrados (carga hidráulica, vazão ou velocidade da água subterrânea) então, estes podem ser calculados em qualquer ponto através de um procedimento de superposição.

De fato, os modelos analíticos utilizam funções que geram uma contribuição para o potencial de descarga da carga hidráulica. Embora os dados de entrada e saída ocorram em termos de carga, a formulação interna de potencial de descarga simplifica a matemática, pois as soluções para o fluxo subterrâneo, em termos de potencial de descarga, são exatamente as mesmas, tanto para condições confinadas como para não confinadas. Embora a equação diferencial do fluxo permanente não confinado seja não linear em termos de carga, ela é linear em termos de potencial de descarga, o que é um pré-requisito para a superposição de soluções. A maioria dos elementos analíticos é representada por uma função harmônica: soluções para a equação de Laplace. Estas soluções podem ser formuladas em termos de função de potencial complexo. A parte real da função é o potencial de descarga e a parte imaginária é a função de linha de fluxo, a qual é constante ao longo das linhas de fluxo. No entanto, a maioria dos problemas práticos de fluxo subterrâneo envolve recarga ou percolação de água de área para um aquífero vizinho, ou ambos. Estes componentes são representados pela equação de Poisson para a qual não existe a função de linha de fluxo. Contudo, distinguindo-se entre as soluções das equações de Poisson e Laplace, é possível utilizar a função de linha de fluxo para o traçado das linhas de fluxo ou para a definição das fronteiras drenantes ou de fluxo nulo nos modelos analíticos [5]. Os modelos tridimensionais utilizam soluções para a equação de Laplace apenas em três dimensões as quais são sempre funções reais. Os elementos analíticos

tridimensionais podem ser embutidos em modelos regionais bidimensionais [3] [10] e [11] o que é muito mais eficiente do que criar um tridimensional para todo o sistema de fluxo subterrâneo.

O vetor de vazão para a água subterrânea é o gradiente do potencial de carga. Os programas de elementos analíticos, por esta razão, também contêm derivadas espaciais dos potenciais de descarga para cada componente do aquífero. Com as mesmas taxas de infiltração ou extração, estas funções derivadas são superpostas para obter o vetor de vazão em qualquer ponto do aquífero.

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DE ALGUNS ELEMENTOS ANALÍTICOS

Os elementos mais utilizados para representarem, através de funções analíticas, as características dos componentes dos aquíferos são os descritos a seguir.

Elemento fluxo uniforme

Segundo [5] o potencial complexo para o elemento fluxo uniforme com taxa de vazão Q_0 [$(L^3T^{-1})L^{-1}$], ou seja, vazão por unidade de largura do aquífero, é dado por:

$$\Omega = -Q_0 z e^{-i\alpha} + C \quad (1)$$

Onde α é a orientação do fluxo uniforme e C é a constante de integração.

Separando-se as partes real e imaginária, o potencial complexo, em termos de coordenadas Cartesianas, fica:

$$\Omega = -Q_0 (x + iy)(\cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha) + C \quad (2)$$

Desta maneira, o potencial de descarga e a função de linha de fluxo são dados pelas equações:

$$\Phi = -Q_0 (x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha) \quad \text{e} \quad \Psi = -Q_0 (y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha) \quad (3)$$

O vetor vazão pode ser derivado, então, de várias maneiras:

1^a – Utilizando a Lei de Darcy:

$$Q_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = Q_0 \cos \alpha \quad \text{e} \quad Q_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q_0 \operatorname{sen} \alpha \quad (4)$$

2^a – Utilizando as equações de Cauchy-Riemann:

$$Q_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} = Q_0 \cos \alpha \quad \text{e} \quad Q_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = Q_0 \operatorname{sen} \alpha \quad (5)$$

3ª – Utilizando a função de vazão, W :

$$Q_x = \Re(W) \quad \text{e} \quad Q_y = -\Im(W) \quad (6)$$

Onde a função de vazão W é obtida pela diferenciação:

$$W = -\frac{\partial \Omega}{\partial z} = -\frac{d}{dz}(-Q_0 z e^{-i\alpha}) = Q_0 e^{-i\alpha} \quad (7)$$

Combinando as equações (7) e (6) tem-se que:

$$Q_x = Q_0 \cos \alpha \quad \text{e} \quad Q_y = Q_0 \sin \alpha \quad (8)$$

As expressões da equação (4) satisfazem a equação de Laplace e geram a taxa de fluxo uniforme propriamente dita, tendo em vista que o fluxo total entre duas linhas de fluxo é igual a diferença entre os valores da função de linha de fluxo destas duas linhas e que o potencial de descarga, Φ , decresce na direção do fluxo, enquanto que a função Ψ decresce na direção normal e à esquerda do fluxo. A Figura 1 representa, graficamente, as expressões da equação (3), ou seja, o traçado da rede de fluxo para o fluxo uniforme. Esta, como as demais figuras dos elementos analíticos, foi obtida com o auxílio do programa MAPLE 6.0 [7]; [8] e [12].

Elemento poço

O fluxo em um aquífero devido a um poço é radial e simétrico. Aplicando-se a continuidade do fluxo através do círculo de raio r ao redor do poço, a taxa de bombeamento (vazão do poço) Q [$L^3 T^{-1}$] é dada por:

$$Q = 2\pi r (-Q_r) \quad (9)$$

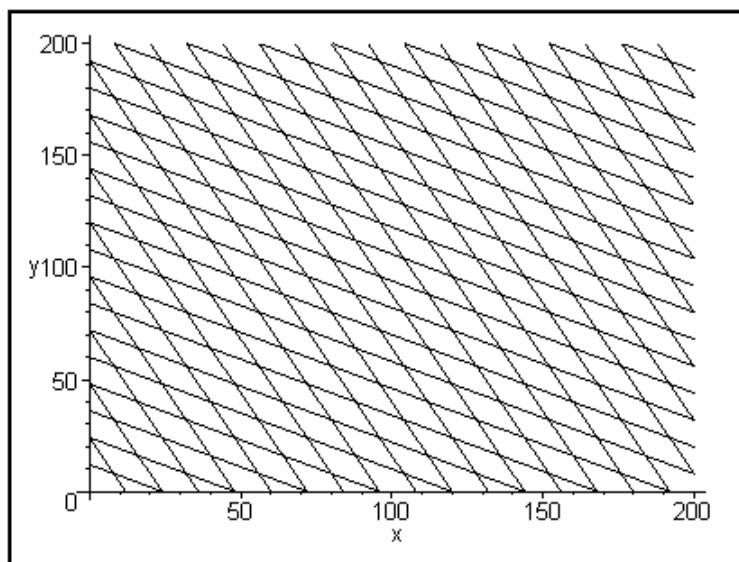


Figura 1 - Traçado da rede de fluxo para o elemento fluxo uniforme (x e y em metros).

Onde $(-Q_r)$ é a componente do vetor vazão através do círculo por unidade de comprimento do círculo. O sinal negativo indica que o fluxo ocorre na direção negativa de r .

A componente do vetor vazão, Q_r , satisfaz a Lei de Darcy:

$$Q_r = -\frac{d\Phi}{dr} \quad (10)$$

Combinando-se as equações (9) e (10), tem-se:

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{Q}{2\pi r} \quad (11)$$

O potencial de descarga Φ é, então, obtido pela integração de (11) com relação a r :

$$\Phi = \int \frac{d\Phi}{dr} dr = \int \frac{Q}{2\pi r} dr = \frac{Q}{2\pi} \ln r + C_w \quad (12)$$

Onde C_w é a constante de integração que pode ser escolhida para satisfazer quaisquer condição de contorno. A uma distância R do poço o valor do potencial de descarga é Φ_0 , assim:

$$r = R \quad \text{e} \quad \Phi = \Phi_0 \quad (13)$$

Substituindo-se estes valores, o valor de C_w é obtido e pode-se finalmente escrever o potencial de descarga em função de r :

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r}{R} + \Phi_0 \quad (14)$$

As linhas de fluxo para o poço também são radiais emanando para o centro do poço. A função de linha de fluxo é dada por:

$$\Psi = \frac{Q}{2\pi} \theta \quad (15)$$

O ângulo θ das coordenadas polares (r, θ) pode ser representado por coordenadas Cartesianas (x, y) e escreve-se, então, que:

$$\Psi = \frac{Q}{2\pi} \arctan \frac{y}{x} \quad (16)$$

O potencial complexo para o poço é dado pela equação:

$$\Omega(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_w) + C \quad (17)$$

Onde z_w é a localização do poço no plano complexo. Para a separação das partes real e imaginária o potencial é dado em termos de coordenadas polares:

$$\Omega(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(|z - z_w| e^{i\theta}) + C = \frac{Q}{2\pi} (\ln|z - z_w| + i\theta) \quad (18)$$

A parte real de Ω é o potencial de descarga:

$$\Phi = \Re(\Omega) = \frac{Q}{2\pi} \ln r \quad r = |z - z_w| \quad (19)$$

e a parte imaginária de Ω é a função de linha de fluxo, como na equação (15):

$$\Psi = \Im(\Omega) = \frac{Q}{2\pi} \theta \quad (20)$$

Tanto as linhas equipotenciais como as linhas de fluxo representadas, respectivamente, pelas equações (19) e (20) são traçadas na Figura 2.

A função de linha de fluxo na equação (20) exibe um salto quando o valor principal do ângulo θ salta de $+\pi$ para $-\pi$ através de sua fenda. A fenda do ângulo θ pode ser escolhida em direções

diferentes, no caso da Figura 3 é na direção vertical. O importante é que ela sempre deverá apresentar um salto de 2π . Se for colocado o sistema de coordenadas no centro do poço, no caso da fenda ser horizontal, a função de linha de fluxo terá o valor de $+Q/2$ logo acima do eixo negativo de x e $-Q/2$ logo abaixo do eixo negativo de x .

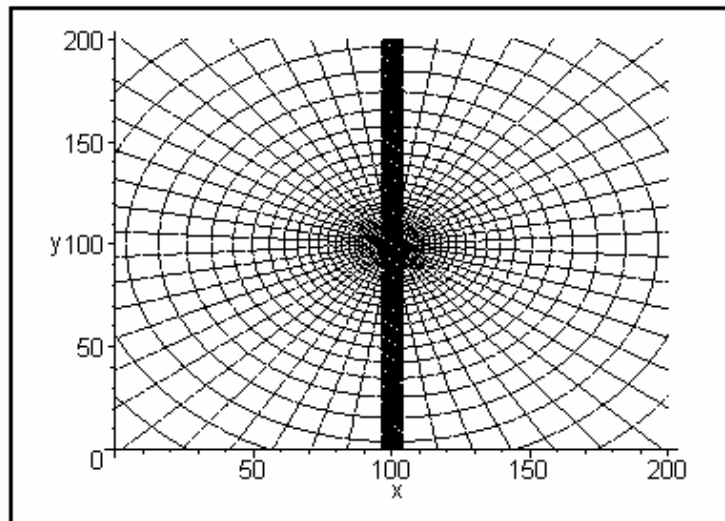


Figura 2 - Traçado da rede de fluxo para o elemento poço (x e y em metros).

A razão para o salto é porque, no próprio poço, a divergência da vazão não é zero, mas é igual à vazão no poço. Conseqüentemente a equação de Laplace não pode ser aplicada, pontualmente, no poço. O poço não deve ser considerado como parte do domínio do fluxo, o que não se constitui um problema, visto que, não é costume avaliar-se cargas e fluxos dentro do raio interno do poço. Como uma interpretação física para isto, pode-se imaginar o domínio do fluxo (no plano bidimensional) sendo cortado e aberto ao longo do eixo x e em volta do poço, eliminando-se o poço do domínio do fluxo. A água que flui em direção ao poço, dentro do domínio do fluxo, é removida através desta fenda ao longo do eixo negativo de x . Portanto, existe um fluxo (fictício) Q a partir do poço, através da fenda e em direção ao infinito. De fato, este fluxo é consistente com o comportamento da função de linha de fluxo através da fenda, cujo salto Q sugere um fluxo na fenda igual a Q . A direção do fluxo na fenda é a partir do poço para o infinito.

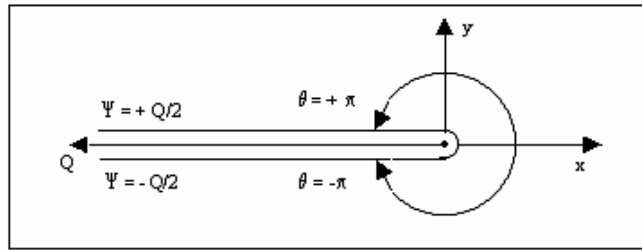


Figura 3 - Fenda horizontal na função de linha de fluxo para um poço com vazão Q qualquer.

Elemento recarga de área devido à infiltração de água de chuva

A forma de recarga de área através de infiltração de água proveniente de chuvas é, sem dúvidas, a fonte mais importante para a água subterrânea, principalmente quando visto pelo aspecto regional. É importante ressaltar que a taxa de infiltração varia tanto sazonalmente, os padrões de inverno e verão diferem e influenciam na solução, como espacialmente, dependendo do tipo litológico do aquífero. Nos modelos de Dupuit-Forchheimer o fluxo subterrâneo devido à recarga de área, sujeita à precipitação, é governado pela equação de Poisson. Assim, a taxa de infiltração ou recarga N [LT^{-1}] é considerada como um termo de fonte na equação diferencial.

A equação da continuidade do fluxo é dada por:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = N \quad (21)$$

Combinando-se a equação (21) com a Lei de Darcy resulta na equação de Poisson:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -N \quad \text{ou} \quad \nabla^2 \Phi = -N \quad (22)$$

A solução existente do fluxo subterrâneo para a equação de Laplace, em termos de potencial de descarga, pode ser expandida para incluir a recarga de área adicionando-se uma solução particular para a equação de Poisson, $\Phi = \Phi_{Laplace} + \Phi_{Poisson}$. A solução combinada satisfaz, então, a equação de Poisson.

Segundo [13] as áreas exatamente circulares não ocorrem com frequência na natureza, sendo assim, uma área elíptica pode ser considerada como a mais adequada para o estudo do fluxo devido à precipitação. Uma solução particular para o potencial de descarga que satisfaz a equação diferencial (22) pode ser dada pela equação:

$$\Phi = -\frac{1}{2} \frac{N}{a^2 + b^2} \left[b^2(x - x_0)^2 + a^2(y - y_0)^2 \right] \quad (23)$$

As equipotenciais produzidas por esta equação são elipses com o centro em (x_0, y_0) , com a razão entre os eixos principais igual a a/b . Esta função possui quatro graus de liberdade ou variáveis principais [1]: N , a/b , x_0 e y_0 . Nota-se que a equação anterior pode ser escrita inteiramente em termos da relação a/b ; com a e b , juntos, representando um único grau de liberdade.

Os valores destes quatro parâmetros afetam o comportamento do potencial fora da área de interesse e, além de tudo, esta função tem um efeito nos contornos internos, tais como os rios. Os elementos analíticos devem compensar este efeito e os valores dos quatro parâmetros independentes devem ser escolhidos, geralmente, de maneira que a função potencial de descarga cause o mínimo de distúrbio possível nas condições de contorno. De acordo com a Figura 4, para o elemento recarga de área devido à precipitação, apenas é possível o traçado das linhas equipotenciais. Não havendo assim linhas de fluxo.

Elemento área circular de recarga interna

Uma área circular de recarga, que pode representar um lago, uma lagoa, uma área circular de irrigação ou de um pântano, é considerada como uma fonte em forma de disco.

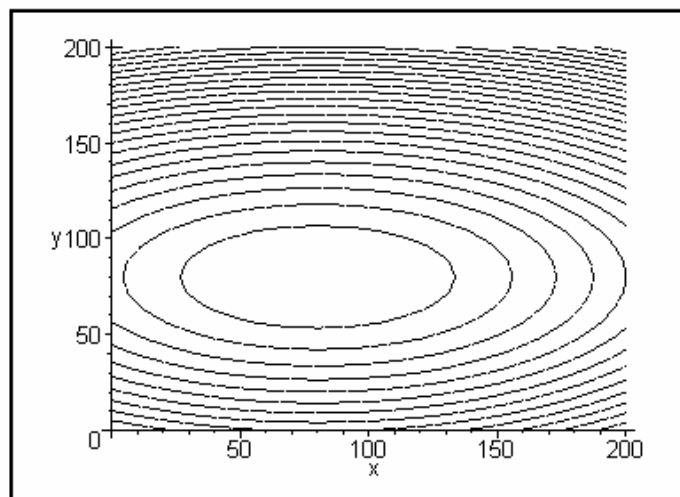


Figura 4 - Traçado das equipotenciais para uma área elíptica devido à infiltração de água de chuva (x e y em metros).

No interior da área existe uma recarga N [LT^{-1}] de maneira que o fluxo que fica abaixo do contorno desta área é governado pela equação de Poisson. Já na área que fica fora do disco não

existe recarga, ficando assim o fluxo governado pela equação de Laplace. A solução para o problema tem que satisfazer a equação de Poisson para a área interna do disco ($r \leq R$) e a equação de Laplace para a área externa do disco ($r > R$), sendo R o raio do círculo. O potencial de descarga é dado pelo produto da recarga N e a função coeficiente G_p segundo a equação:

$$\Phi = NG_p(x,y,x_0,y_0,R) \quad (24)$$

Onde (x_0,y_0) é o centro do círculo (disco) e a função coeficiente é dada por:

$$G_p(x,y,x_0,y_0,R) = -\frac{1}{4} \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - R^2 \right] \quad (25)$$

para $\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \leq R \right)$

$$G_p(x,y,x_0,y_0,R) = -\frac{R^2}{4} \ln \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{R^2} \quad (26)$$

para $\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} > R \right)$

A função de linha de fluxo para um lago circular pode ser escrita da seguinte forma:

$$\Psi = -N \left[y + \frac{yR^2}{x^2 + y^2} \right] \quad (27)$$

O traçado da rede de fluxo está apresentado nas Figura 5.

Em resumo, o potencial complexo para um lago circular pode ser dado pela equação:

$$\Omega = -N \left(z - \frac{R^2}{z} \right) \quad (28)$$

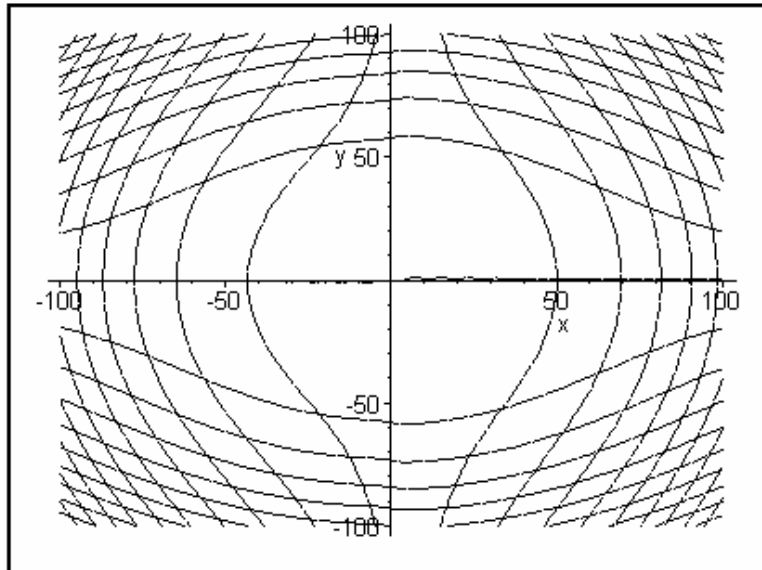


Figura 5 - Traçado da rede de fluxo para um lago circular de raio R (x e y em metros).

Onde o centro está na origem do plano complexo ($z_0 = 0$) e o lago que tem raio R e taxa de infiltração pela base N .

Elemento linha de perda ou ganho

De acordo com a Figura 6, a linha de perda ou ganho é considerada como se fosse um número finito de poços, uniformemente distribuídos, em uma linha entre dois pontos z_1 e z_2 . Uma linha de perda ou ganho real, que pode representar um rio ou um riacho, é obtida se o número de poços na Figura 6 (a) for infinitamente grande ao mesmo tempo em que suas vazões totais permaneçam finitas. No caso da linha ser uma linha de perda, estas vazões seriam iguais à taxa de extração total. A análise matemática é realizada em termos de variáveis complexas. O potencial complexo Ω para M poços ao longo do elemento de linha é [4]:

$$\Omega = \sum_{i=1}^M \frac{Q^{(i)}}{2\pi} \ln(z - \zeta_i) \quad (29)$$

Onde $Q^{(i)}$ é a taxa de vazão do i -ésimo poço.

Em média, a linha de perda tem uma taxa de infiltração de σ [$(L^3T^{-1})L^{-1}$] (por exemplo: metros cúbicos por dia por metro de comprimento da linha de perda). Se o poço em ζ_i representa uma seção Δl da linha de perda, pode-se escrever para $Q^{(i)}$:

$$Q_{(i)} = \Delta l \sigma \quad (30)$$

Com a qual pode-se reescrever a equação (29) na forma:

$$\Omega_{ls} = \sum_{i=1}^M \frac{\sigma}{2\pi} \ln(z - \zeta_i) \Delta l \quad (31)$$

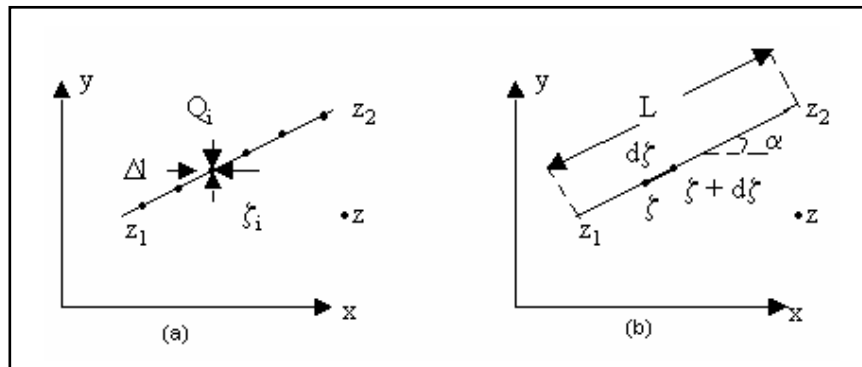


Figura 6 - A linha de perda com uma distribuição de poços em uma linha (a) para o caso limite de um número infinito de poços com uma vazão total finita (b).

Se a linha de perda for representada por um número infinito de poços, Figura 6 (b), então, $M \rightarrow \infty$ e $\Delta l \rightarrow 0$, a soma em (31) é substituída pela integral:

$$\Omega = \int_0^L \frac{\sigma}{2\pi} \ln(z - \zeta) dl \quad (32)$$

Para que a integral em (32) possa ser escrita como uma integral complexa em termos do parâmetro ζ , é introduzida a variável complexa infinitesimal $d\zeta$:

$$d\zeta = \Delta l e^{i\alpha} \quad (33)$$

Onde α é o ângulo entre a linha de perda e o eixo x positivo. Com a equação (33) reescreve-se a equação (32):

$$\Omega = \frac{\sigma}{2\pi} e^{-i\alpha} \int_{z_1}^{z_2} \ln(z - \zeta) d\zeta \quad (34)$$

A integral em (34) é da forma $\int \ln x dx = x \ln x - x$, de maneira que o potencial complexo para uma linha de perda fica assim:

$$\Omega = \frac{\sigma}{2\pi} e^{-i\alpha} [(z - z_1) \ln(z - z_1) - (z - z_2) \ln(z - z_2) + (z_1 - z_2)] \quad (35)$$

Utilizando o sistema de coordenadas locais

Utilizando-se coordenadas locais, a função do potencial de descarga, ou seja, a parte real do potencial complexo, para o elemento linha de perda ou ganho é dada pela seguinte fórmula [13]:

$$\Phi = \frac{\sigma L}{4\pi} \left[-X \ln \left| \frac{Z-1}{Z+1} \right| + Y\theta + \ln |Z^2 - 1| + 2 \ln \frac{L}{2} - 2 \right] \quad (36)$$

A função das linhas de fluxo para o elemento linha de perda ou ganho é dada pela seguinte fórmula, também em coordenadas locais:

$$\Psi = \frac{\sigma L}{4\pi} [(X+1)\theta_1 - (X-1)\theta_2 + 2\alpha] \quad (37)$$

A linha de perda (rio ou riacho) extrai uma vazão total de σL [L^3T^{-1}] do aquífero. Isto gera uma fenda (branch cut) na função de linha de fluxo, Ψ , de maneira similar ao que acontece com o poço. No poço a fenda é pontual e, no caso do rio ou riacho, esta fenda se estende para o infinito na direção da linha e conseqüentemente a carga abaixo do rio ou riacho não irá representar a cota do nível d'água em todos os pontos ao longo da linha, mas irá oscilar entre os pontos de controle onde a carga é considerada igual a carga no rio.

O potencial complexo para a linha de perda ou ganho é representado pela seguinte equação [13], escrita em termos de variável complexa local Z :

$$\Omega = \frac{\sigma L}{4\pi} \left\{ (Z+1) \ln(Z+1) - (Z-1) \ln(Z-1) + 2 \ln \left[\frac{1}{2} (z_2 - z_1) \right] - 2 \right\} \quad (38)$$

O traçado da rede de fluxo para o elemento linha de perda ou ganho que pode ser representado por um rio fica de acordo com a Figura 7.

Elemento linha dupla

A linha dupla, apresentada por [4], é chamada, na literatura, de camada dupla porque representa uma dupla distribuição de descontinuidade. Conceitualmente, uma linha de descontinuidade é uma linha de perda e uma linha de ganho que se movem infinitamente juntas, enquanto que suas taxas de vazão e recarga permanecem iguais, mas crescentes até valores infinitamente altos (ver Figura 8 (a)).

Uma linha fechada com linhas de descontinuidades pode ser utilizada para modelar um domínio com condutividades hidráulicas diferentes, ou seja, regiões não homogêneas que podem ser de formas poligonais ou circulares.

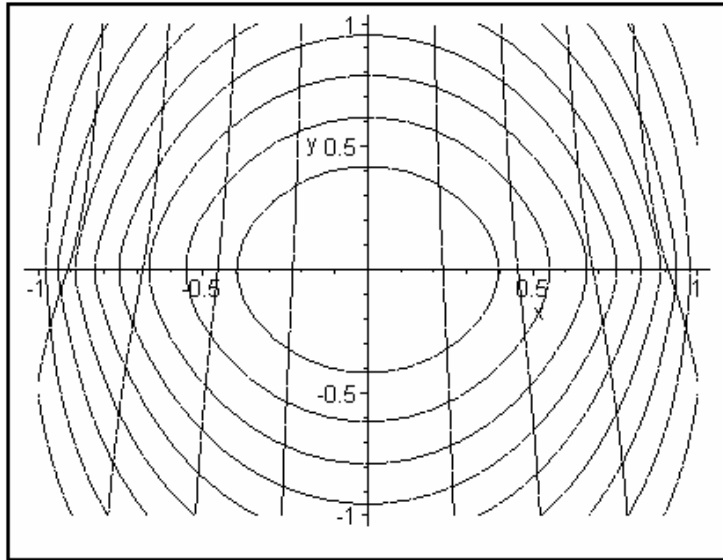


Figura 7 - Traçado da rede de fluxo para um rio em coordenadas locais.

Para derivar uma linha de descontinuidade de vazão constante, adota-se o procedimento de utilizar a função da linha de perda ou ganho desenvolvida na seção anterior. Para tanto, escreve-se a equação (35), simbolicamente, como:

$$\Omega_{ld} = \sigma A_{ld}(z, z_0, L, \alpha) \quad (39)$$

Onde a função coeficiente A_{ld} é definida como:

$$A_{ld} = \frac{e^{-i\alpha}}{2\pi} [(z - z_1)\ln(z - z_1) - (z - z_2)\ln(z - z_2) + (z_1 - z_2)] \quad (40)$$

Com:

$$z_1 = z_0 - \frac{L}{2} e^{i\alpha} \quad e \quad z_2 = z_0 + \frac{L}{2} e^{i\alpha} \quad (41)$$

E onde z_0 é o centro da linha de perda; ver Figura 8 (b). O potencial complexo Ω_{ld} para uma linha de descontinuidade é obtido para o caso limite onde a distância d entre a linha de perda e a linha de ganho na Figura 8 (a) tende para zero, enquanto que a vazão σ se torna infinitamente alta:

$$\Omega_{ld} = \lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ \sigma \rightarrow \infty}} \frac{\sigma d}{2\pi} \left[\frac{A_{ld} \left(z, z_0 + \frac{\Delta z_0}{2}, L, \alpha \right) - A_{ld} \left(z, z_0 - \frac{\Delta z_0}{2}, L, \alpha \right)}{d} \right] \quad (42)$$

Onde Δz_0 é definido como:

$$\Delta z_0 = de^{i(\alpha + \frac{\pi}{2})} = ide^{i\alpha} \quad (43)$$

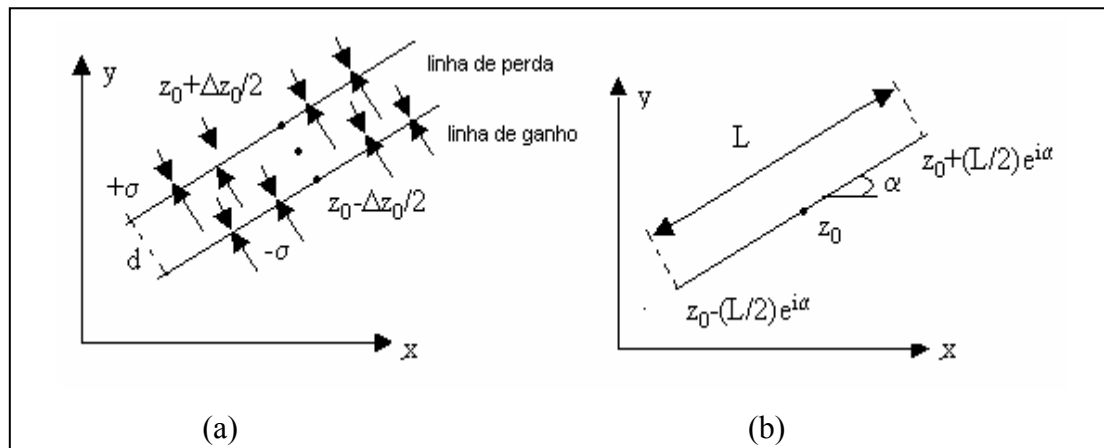


Figura 8 - Uma linha de descontinuidade formada por um par de linhas de perda e de ganho (a) para o caso limite da distância d igual a zero e vazão infinita σ (b).

O valor da vazão s da linha de descontinuidade é definida por:

$$s = \lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ \sigma \rightarrow \infty}} \sigma d \quad (44)$$

Combinando-se a equação (42) com a (43), tem-se:

$$\Omega_{ld} = \frac{ise^{i\alpha}}{2\pi} \lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \left[\frac{A_{ld} \left(z, z_0 + \frac{\Delta z_0}{2}, L, \alpha \right) - A_{ld} \left(z, z_0 - \frac{\Delta z_0}{2}, L, \alpha \right)}{\Delta z_0} \right] \quad (45)$$

Que se torna:

$$\Omega_{ld} = \frac{ise^{i\alpha}}{2\pi} \frac{d}{dz_0} A_{ld}(z, z_0, L, \alpha) \quad (46)$$

Ou com a equação (40) e aplicando-se a regra da cadeia:

$$\begin{aligned}\Omega_{ld} &= \frac{is}{2\pi} \left[\frac{d}{dz_1} \{(z - z_1) \ln(z - z_1)\} \frac{dz_1}{dz_0} - \frac{d}{dz_2} \{(z - z_2) \ln(z - z_2)\} \frac{dz_2}{dz_0} \right] \\ &= \frac{is}{2\pi} [-\ln(z - z_1) + \ln(z - z_2)]\end{aligned}\quad (47)$$

Onde: $dz_1/dz_0 = dz_2/dz_0 = 1$; ver Figura 8 (b). O potencial complexo para a linha de descontinuidade, com vazão constante, é finalmente escrito como:

$$\Omega_{ld} = \frac{is}{2\pi} \ln \left(\frac{z - z_2}{z - z_1} \right) \quad (48)$$

Separando-se a parte real e imaginária do potencial complexo, tem-se que:

$$\Phi_{ld} = \Re\{\Omega_{ld}\} = \Re \left\{ \frac{is}{2\pi} \left[\ln \left| \frac{z - z_2}{z - z_1} \right| + i(\theta_2 - \theta_1) \right] \right\} = \frac{s}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2) \quad (49)$$

Para o potencial de descarga e para a função de linha de fluxo a seguinte equação:

$$\Psi_{ld} = \Im\{\Omega_{ld}\} = \frac{s}{2\pi} \ln \left| \frac{z - z_2}{z - z_1} \right| \quad (50)$$

A função de linha de fluxo é contínua, mas a função do potencial de descarga exibe um salto através da linha dupla cujo valor é igual ao da vazão s .

Potencial complexo para o dipolo

Um dipolo com orientação α_d é obtido através da aproximação de um ponto fonte em direção a um ponto sumidouro ao longo de uma linha de orientação α enquanto a vazão aumenta em proporção inversa com a distância entre os dois pontos, ver Figura 9.

Resumindo-se, o potencial complexo é dado pela seguinte fórmula:

$$\Omega = \frac{s}{2\pi} \frac{e^{i\alpha_d}}{z - z_0} \quad (51)$$

onde: $s = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ Q \rightarrow \infty}} Q\delta$ e δ = distância entre a fonte e o sumidouro

Não existe fluxo de entrada nem de saída associados com o dipolo e o mesmo é verdade para a linha dupla. Por esta razão, a fenda não se estende para o infinito. A diferença entre uma linha de perda ou ganho e uma linha com dipolo é que o dipolo não extrai uma quantidade de fluido, enquanto que a linha de perda extrai.

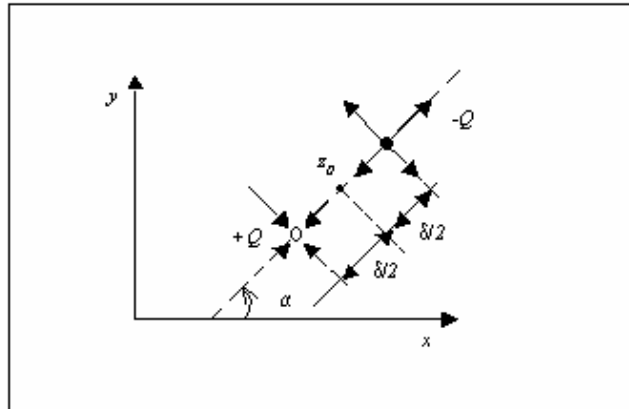


Figura 9 - Um par de pontos: um ponto sumidouro e um ponto fonte à distância zero com vazão infinita formando um dipolo.

A Figura 10 apresenta o traçado da rede de fluxo para um dipolo.

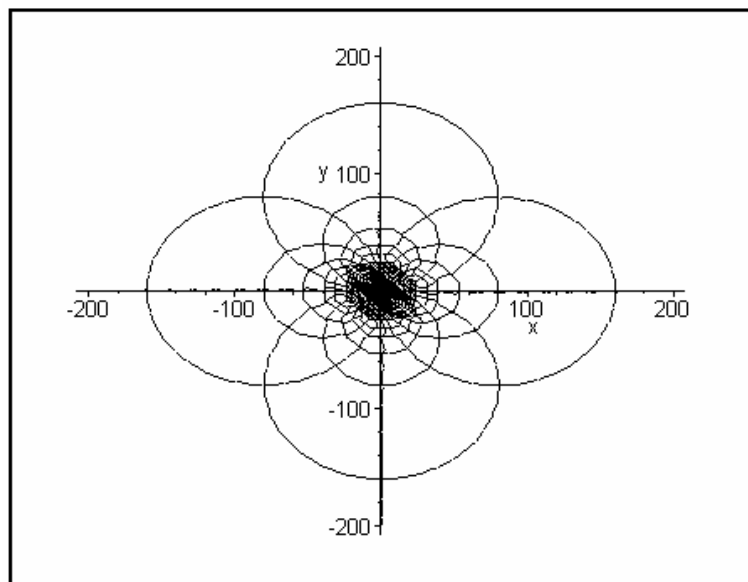


Figura 10 - Traçado da rede de fluxo para um dipolo (x e y em metros).

Elemento inomogeneidade circular

A solução é formulada em termos de potencial de descarga no interior e no exterior da inomogeneidade circular. O potencial no interior da inomogeneidade é dado por:

$$\Phi(x, y) = -Q_0 \frac{2k_i}{k_o + k_i} x \quad \text{com } (x^2 + y^2) \leq R^2 \quad (52)$$

E, fora da inomogeneidade, pela fórmula:

$$\Phi(x, y) = -Q_0 \left[x + \frac{k_o - k_i}{k_o + k_i} \frac{xR^2}{x^2 + y^2} \right] \quad \text{com } (x^2 + y^2) \geq R^2 \quad (53)$$

Onde k_i e k_o são as condutividades hidráulicas dentro e fora da inomogeneidade circular, respectivamente. A Figura 11 mostra o traçado das linhas equipotenciais para uma inomogeneidade circular. A função de linha de fluxo para os domínios interior e exterior do círculo são:

$$\Psi(x, y) = -Q_0 \frac{2k_i}{k_o + k_i} y \quad \text{com } (x^2 + y^2) \leq R^2 \quad \text{e} \quad (54)$$

$$\Psi(x, y) = -Q_0 \left[y + \frac{k_o - k_i}{k_o + k_i} \frac{yR^2}{x^2 + y^2} \right] \quad \text{com } (x^2 + y^2) \geq R^2 \quad (55)$$

SOLUÇÃO PARA PARÂMETROS DESCONHECIDOS

O procedimento da solução leva a um sistema de equações algébricas que é resolvido para os parâmetros desconhecidos das linhas de perda ou ganho e das linhas duplas. Um exemplo de como o sistema funciona é o seguinte: O ponto médio de algumas linhas de perda ou ganho que representam os rios e lagos na área do modelo, indicam a localização dos pontos de controle. Cada linha de perda ou ganho tem um ponto de controle no seu ponto médio e o nível da água é especificado na superfície no rio.

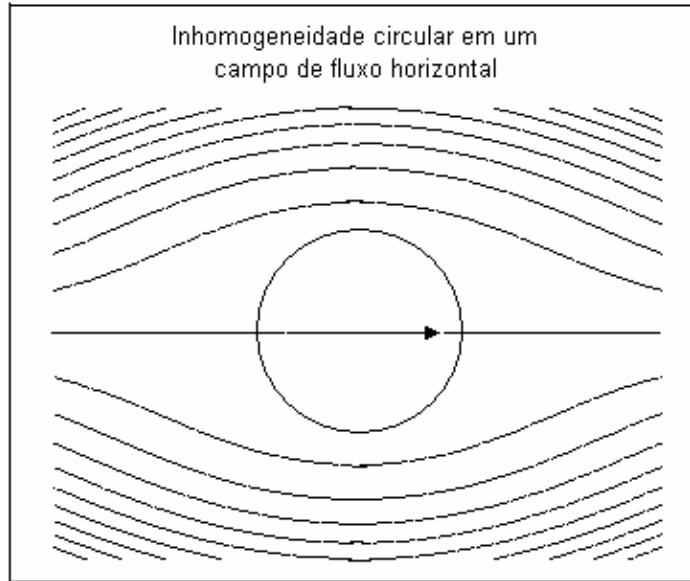


Figura 11 - Uma inhomogeneidade circular em um fluxo uniforme horizontal ($k_i / k_o = 0,1$).

Supondo-se que a superfície de água está em completo contato com o aquífero, implicando que a carga no aquífero, no ponto de controle, é a mesma que a do nível da água de superfície neste ponto, o potencial de descarga, nos pontos de controle, devido a n linhas de perda ou ganho, pode ser escrito através da equação:

$$\Phi_i = \sigma_1 Flpg_{i,1} + \sigma_2 Flpg_{i,2} + \sigma_3 Flpg_{i,3} + \dots + \sigma_n Flpg_{i,n} + C \quad (56)$$

que é uma maneira simbólica de escrever as contribuições de todas as linhas de perda ou ganho para o potencial de descarga no i -ésimo ponto de controle. A função $Flpg_{i,j}$ é a função coeficiente da j -ésima linha de perda ou ganho avaliada no ponto médio da i -ésima linha de perda ou ganho. A função $Flpg_{i,j}$ é a parte real do potencial complexo na equação (40):

$$Flpg_{i,j} = \Re \left\{ \frac{1}{2\pi} e^{-i\alpha_j} \left[(z_i - (z_1)_j) \ln(z_i - (z_1)_j) - (z_i - (z_2)_j) \ln(z_i - (z_2)_j) + ((z_1)_j - (z_2)_j) \right] \right\} \quad (57)$$

Onde, z_i são as coordenadas complexas do i -ésimo ponto de controle, $(z_1)_j$ e $(z_2)_j$ são os pontos inicial e final de j -ésima linha de perda ou ganho e σ_j é a orientação da j -ésima linha de perda ou ganho. Nota-se que a função coeficiente é o potencial devido à linha de perda ou ganho com o valor de vazão 1. Então, $\sigma_j Flpg_{i,j}$ é o potencial da linha de perda ou ganho com sua taxa de infiltração real σ_j .

Elemento ponto de referência

O número de equações disponíveis para os pontos de controle pode não ser suficiente para resolver este sistema. Não existe outra opção a não ser a de se impor alguma outra condição de maneira a se obter uma equação extra para o sistema. Na maioria dos modelos de elementos analíticos isto é feito através da introdução de um ponto de referência no qual a carga hidráulica de referência é definida. Isto consiste em uma condição arbitrária que é forçada devido a uma necessidade matemática: para se dispor de equações suficientes para determinação das incógnitas. Como este ponto é introduzido por propósitos matemáticos e não por razões hidrológicas o mesmo deve ser selecionado de maneira que não tenha nenhuma influência nos resultados da modelagem na área de interesse do domínio. Este ponto deve ser colocado afastado da área de interesse e não deve ser escolhido dentro dos elementos analíticos. A carga atribuída a ele deve ser neutra: aproximadamente igual à carga média do domínio do modelo. Procedendo-se assim, a escolha do ponto de referência causará gradientes hidráulicos relativamente baixos e as variações na carga neste ponto não irão influenciar na solução do problema.

Equações matrizes

O resultado das $n+1$ equações pode ser escrito na seguinte forma matricial:

$$a_{ij}x_j = b_j \quad (i = 1, \dots, n+1) \quad \text{e} \quad (j = 1, \dots, n+1) \quad (58)$$

Onde a matriz coeficiente a_{ij} é definida como:

$$a_{ij} = \text{Flpg}_{i,j} \quad (i = 1, \dots, n+1) \quad \text{e} \quad (j = 1, \dots, n) \quad (59)$$

$$a_{ij} = 1.0 \quad (i = 1, \dots, n+1) \quad \text{e} \quad (j = n+1) \quad (60)$$

Onde $(n+1)$ -ésimo ponto de controle é o ponto de referência. O vetor solução x_j é definido como:

$$x_j = \sigma_j \quad (j = 1, n) \quad (61)$$

$$x_{n+1} = C \quad (62)$$

E o vetor conhecido b_i é definido por:

$$b_i = \Phi_i \quad (i = 1, n) \quad (63)$$

$$b_{n+1} = \Phi_{ref} \quad (64)$$

Onde Φ_{ref} é o potencial de descarga no ponto de referência.

As equações da matriz podem ser solucionadas pelos procedimentos padrões diretos de resolução de sistemas lineares, como por exemplo: decomposição de matrizes, substituições e eliminação de Gauss. Quando o número de incógnitas for muito elevado utiliza-se então métodos iterativos.

Geração de resultados numéricos e gráficos

Uma vez que os valores dos parâmetros sejam calculados, o potencial de descarga pode ser calculado em qualquer ponto do aquífero pela superposição de todos os elementos analíticos:

$$\Phi(x, y) = \sum \sigma_i Flpg_{(x,y),i} + \sum s_i Fld_{(x,y),i} + \dots + C \quad (65)$$

Onde $Flpg_{(x,y),i}$ e $Fld_{(x,y),i}$ são as funções coeficiente para a i -ésima linha de perda ou ganho e linha dupla, respectivamente, avaliadas no ponto (x, y) . A expressão (65) não está completa, elementos analíticos adicionais, como por exemplo, poços e áreas de perda ou ganho, estão subentendidos nas reticências.

Em geral, o potencial de descarga, Φ , não é citado quando a modelagem do fluxo de água subterrânea é feita com modelos de elementos analíticos. O usuário entra com as cargas hidráulicas, nos pontos de controle e o programa em uso informa as cargas hidráulicas em qualquer ponto (x, y) do aquífero. Todas as conversões de cargas hidráulicas para potenciais de descarga são tratadas internamente no programa, o que é completamente transparente para o usuário. A carga hidráulica ϕ é calculada a partir de (65) utilizando-se as seguintes já equações mencionadas anteriormente:

$$\phi = \frac{\Phi + \frac{1}{2}kH^2}{kH} \quad \left(\Phi \geq \frac{1}{2}kH^2 \right) \quad \text{e} \quad \phi = \sqrt{\frac{2\Phi}{k}} \quad \left(\Phi \leq \frac{1}{2}kH^2 \right) \quad (66)$$

Nos modelos de elementos analíticos, as cargas hidráulicas devem ser especificadas com relação a uma referência horizontal, usualmente, a média do nível do mar. O usuário deve também especificar o nível da base do aquífero com relação ao mesmo referencial. O vetor de vazão Q_i é obtido pela diferenciação de Φ em $(\Phi = kH\phi)$. Nos modelos de elementos analíticos isto é acompanhado pela superposição das funções derivadas de todos os elementos analíticos:

$$Q_i = -\sum \sigma_j [Flpg'_{(x,y),j}]_i - \sum s_j [Fld'_{(x,y),j}]_i - \dots \quad \text{com} \quad (67)$$

$$Fls'_i = \frac{\partial Flpg}{\partial x_i}, \quad Fld'_i = \frac{\partial Fld}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2) \quad (68)$$

O vetor de vazão específica q_i ($i = 1, 2, 3$) é obtido de (67) e da equação para a vazão específica q_3 , em aquíferos não confinados:

$$q_i = \frac{Q_i}{h}, \quad (i = 1, 2) \quad \text{e} \quad q_3 = \frac{z}{h} \left[\frac{Q_i}{h} \partial_i h - N_t - N_b \right] + N_b, \quad (i = 1, 2) \quad (69)$$

Onde h é a espessura saturada do aquífero não confinado, N_t a taxa de recarga no topo do aquífero e N_b é a taxa de escoamento para dentro do aquífero na base do aquífero. Nas zonas de fluxo confinado, a espessura é constante, $h = H$, de maneira que o primeiro termo dentro dos parêntesis para q_3 desaparece ($\partial_i H = 0$). Nas zonas de fluxo não confinado a espessura saturada do aquífero pode ser substituída pela carga hidráulica ϕ como é obtida de (66).

As velocidades médias do fluxo de água subterrânea v_i ($i = 1, 2, 3$) são obtidas de (69):

$$v_i = \frac{q_i}{n_{ef}} \quad (i=1, 2, 3) \quad (70)$$

na qual n_{ef} é a porosidade efetiva [2].

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BUTKOV, Eugene. **Física matemática**. Tradução: João Bosco Pitombeira de Carvalho. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1988. 725 p. Título original: Mathematical Physics.
- [2] FETTER, C. W. **Applied hydrogeology**. 4th ed. New Jersey: Prentice Hall, 2001. 598 p.
- [3] HAITJEMA, H. M. Modeling three-dimensional flow in confined aquifers by super-position of both two and three-dimensional analytic functions. **Water Resources Research**, Washington D.C, v. 21, n. 10, p. 1557-1566, 1985.
- [4] HAITJEMA, H. M. **Analytic element modeling of groundwater flow**. San Diego: Academic Press. 1995, 400 p. il.

- [5] HAITJEMA, H. M.; KELSON, V. A.; LUTHER, K.H. **Analytic element modeling of groundwater flow and high performance computing**. Ada, Oklahoma: U.S. Environmental Protection Agency, 2000. Environmental Research Brief - EPA/600/S-00/001.
- [6] JANKOVIC', Igor. **SPLIT Manual** - Version 2.3. Department of Civil, Structural and Environmental Engineering. University at Buffalo, USA. 2001. Disponível em: < <http://www.groundwater.buffalo.edu> >. Acesso em: 05 jun. 2001.
- [7] KAMERICH, Ernic. **A Guide to Maple**. New York: Springer, 1998. 321 p.
- [8] KLIMEK, Grazyna; KLIMEK, Maciej. **Discovering curves and surfaces with Maple**. New York: Springer, 1997. 217 p.
- [9] LIGGETT, J.; LIU, P. F. **The boundary integral equation method for porous media flow**. London: George Allen and Unwin Hyman, 1983.
- [10] LUTHER, K. H.; HAITJEMA, H. M. An analytic element solution to unconfined flow near partially penetrating wells. **Journal of Hydrology**, Amsterdam, v. 226, n. 3-4, p. 197-203, 1999.
- [11] _____. Approximate analytic solutions to 3D unconfined groundwater flow within regional 2D models. **Journal of Hydrology**, Amsterdam, v. 229, n. 3-4, p. 101-117, 2000.
- [12] MONAGAN, M. B.; GEDDES, K. O.; HEAL, K. M.; LABAHN, G.; VORKOETTER, S. M. **Maple V: programming guide**. New York: Springer, 1998. 379 p. il.
- [13] STRACK, Otto D. L. **Groundwater mechanics**. New Jersey: Prentice-Hall, 1989, 732 p.
- [14] STRACK, O. D. L.; HAITJEMA, H. M. Modeling double aquifer flow using a comprehensive potential and distributed singularities. 1. Solutions for homogeneous permeabilities. **Water Resources Research**, Washington D.C., v.17, n. 5, p. 1535-1549. Oct. 1981 a.
- [15] _____. Modeling double aquifer flow using a comprehensive potential and distributed singularities. 2. Solutions for inhomogeneous permeabilities. **Water Resources Research**, Washington D.C., v. 17, n. 5, p. 1551-1560, Oct. 1981 b.