UM MODELO ANALÓGICO A RESISTÊNCIAS ELÉTRICAS PARA CÁLCULO DO FLUXO DE UM FLUIDO INCOMPRESSÍVEL NUM MEIO POROSO

POR

R.B. de Souza[1] e A.R.B. de Oliveira[2]

RESUMO -- Este modelo objetiva calcular, por analogia elétrica, o fluxo de água através de barragens ou escavações em meios permeáveis. Consiste na transformação da equação de fluxo com derivadas parciais em uma equação aproximada pelo método de diferenças finitas, e encontrar o esquema elétrico constituído unicamente de resistências, obedecendo a uma equação análoga à equação obtida por diferenças finitas.

INTRODUÇÃO

O princípio da analogia por resistências consiste em transformar uma equação de derivadas parciais em uma equação aproximada por diferenças finitas e a encontrar o esquema elétrico constituído unicamente de resistências, obedecendo a uma equação análoga a equação de diferenças finitas.

METODOLOGIA

Tomemos a equação que rege o movimento de um fluido incompressível em um meio poroso, que escolheremos o mais geral, heterogêneo e anisotrópico.

Se H é a carga num ponto; K_x, K_y os valores de sua permeabilidade nas direções O_x e O_y, sabemos que H deve ser solução da equação :

$$\frac{\partial \left[K_x \frac{\partial H}{\partial x}\right]}{\partial x} + \frac{\partial \left[K_y \frac{\partial H}{\partial y}\right]}{\partial y} = 0 \qquad (1)$$

com :

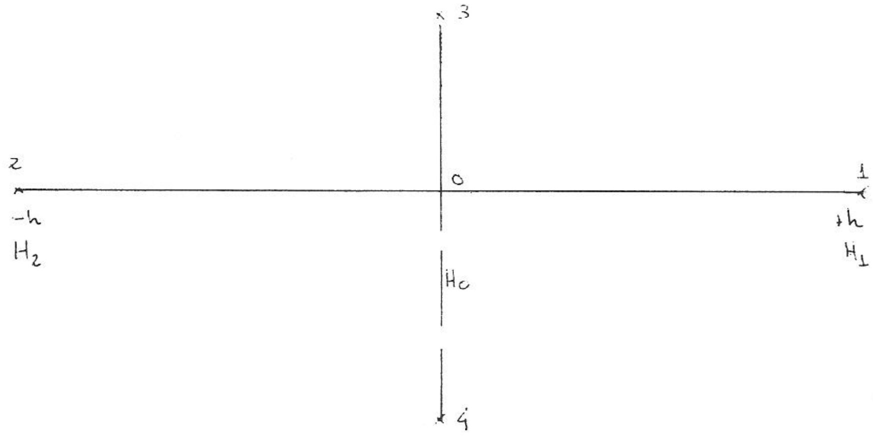
$$\frac{\partial \left[K_x \frac{\partial H}{\partial x}\right]}{\partial x} = K_x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial K_x}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \left[K_y \frac{\partial H}{\partial y}\right]}{\partial y} = K_y \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial K_y}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} \qquad (3)$$

---

1 - Graduando em Engenharia Civil na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
2 - Pesquisador na PUC/RJ.

seja um eixo paralelo ao eixo x com 3 pontos alinhados 1,0,2 de cargas H_1, H_o, H_2 e abicissa h,o,-h.



aplicando o desenvolvimento 1 em série de TAYLOR em 0 e H temos:

$$H_1 = H_o + h \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_o + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)_o + \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (4)$$

$$H_2 = H_o - h \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_o + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)_o + \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (5)$$

o que nos dá desprezando os termos de $3^{\underline{a}}$ ordem .

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_o = \frac{H_1 - H_2}{2h} = \frac{\left(H_1 - H_o\right) - \left(H_2 - H_o\right)}{2h} \qquad (6)$$

$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)_o = \frac{\left(H_1 - H_o\right) + \left(H_2 - H_o\right)}{h^2} \qquad (7)$$

Aplicando o desenvolvimento em série de TAYLOR a K_x em 0 e desprezando os termos de $2^{\underline{a}}$ ordem :

$$K_1 = K_o + h \left(\frac{\partial Kx}{\partial x}\right)_o \qquad (8)$$

$$K_2 = K_o - H \left(\frac{\partial Kx}{\partial x}\right)_o \qquad (9)$$

o que nos dá :

$$\left(\frac{\partial Kx}{\partial x}\right)_o = \frac{K_1 - K_2}{2h} \qquad (10)$$

$$K_o = \frac{K_1 + K_2}{2} \qquad (11)$$

colocando-se (6), (7), (10) em (2) teremos :

$$\frac{\delta\left[K_x \frac{\partial H}{\partial x}\right]}{x} = Ko \frac{(H_1 - H_o) + (H_2 - H_o)}{h^2} + \frac{K_1 - K_2}{2h}$$

$$\frac{(H_1 - H_o) - (H_2 - H_o)}{2h} = \frac{H_1 - H_o}{h^2}\left[K_o + \frac{K_1 - K_2}{4}\right] + \frac{H_2 - H_o}{h^2}$$

$$\left[K_o + \frac{K_2 - K_1}{4}\right] \qquad (12)$$

como dado em (11).

$$K_o = \frac{K_1 + K_2}{2}$$

$$4K_o = 2K_1 + 2K_2$$

em (12) teremos :

$$\frac{\partial\left[Kx \frac{\partial H}{\partial x}\right]}{\partial x} = \frac{H_1 - H_o}{h^2} \cdot \frac{K_o + K_1}{2} + \frac{H_2 - H_o}{h^2}\ \frac{K_o + K_2}{2} \qquad (13)$$

Um cálculo semelhante pode ser feito seguindo um eixo paralelo a OX e passando por 3,0,4 que dará :

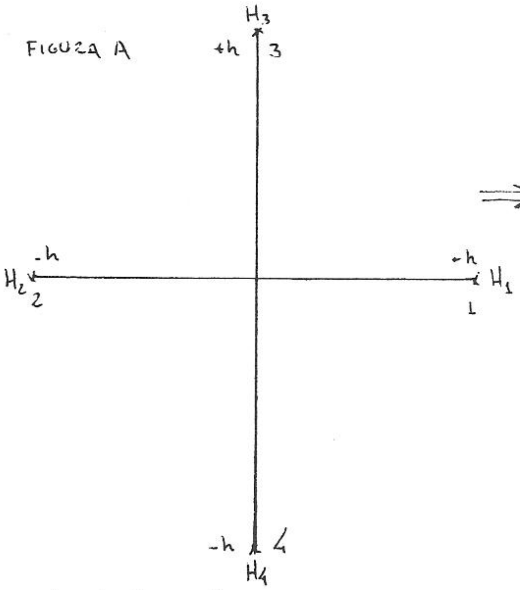
$$\frac{\partial\left[Ky \frac{\partial H}{\partial y}\right]}{\partial y} = \frac{H_3 - H_o}{h^2}\ \frac{K_o + K_3}{2} + \frac{H_4 - H_o}{h^2}\ \frac{K_o + K_4}{2} \qquad (14)$$

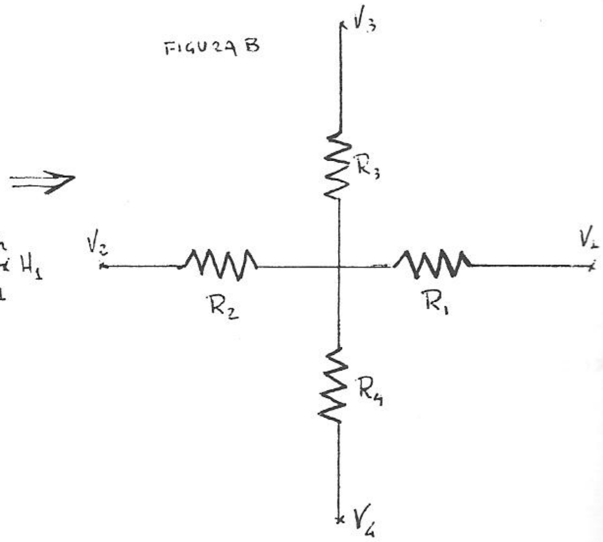
e substituindo Ko + Ki = $2K_{oi}$, onde K_{oi} é a permeabilidade média no seguimento O_i, encontra-se a equação de diferenças finitas :

$$Ko_1 \frac{H_1 - H_o}{h^2} + Ko_2 \frac{H_2 - H_o}{h^2} + Ko_3 \frac{H_3 - H_o}{h^2} + Ko_4 \frac{H_4 - H_o}{h^2} = 0 \quad (15)$$

O esquema elétrico correspondente a malha da figura A é a montagem em estrela da figura B que obedece a lei de KIRCHOFF no nó O

$$\frac{V_1 - V_o}{R_1} + \frac{V_2 - V_o}{R_2} + \frac{V_3 - V_o}{R_3} + \frac{V_4 - V_o}{R_4} = 0 \qquad (16)$$





existirá então analogia entre o potencial elétrico V e a carga hidráulica H se as resistências R_i são :

$$R_i = \frac{R}{K_{oi}} \cdot \text{unidade de } K$$

onde R é a resistência de referência da malha escolhida arbitrariamente.

CONSTRUÇÃO DE UMA MALHA DE RESISTÊNCIAS

a) Escolhe-se uma malha quadrada no domínio do escoamento;

b) A esta malha faz-se uma correspondência a uma malha de resistências elétricas que são calculadas a partir das fórmulas (15), (16) escolhendo a resistência de referência R (17) de maneira a ter valores de R_i fisicamente realizáveis.

c) Escolhe-se arbitrariamente um potencial elétrico que representará a carga total entre montante e jusante e que será aplicada entre os equipotenciais limites.

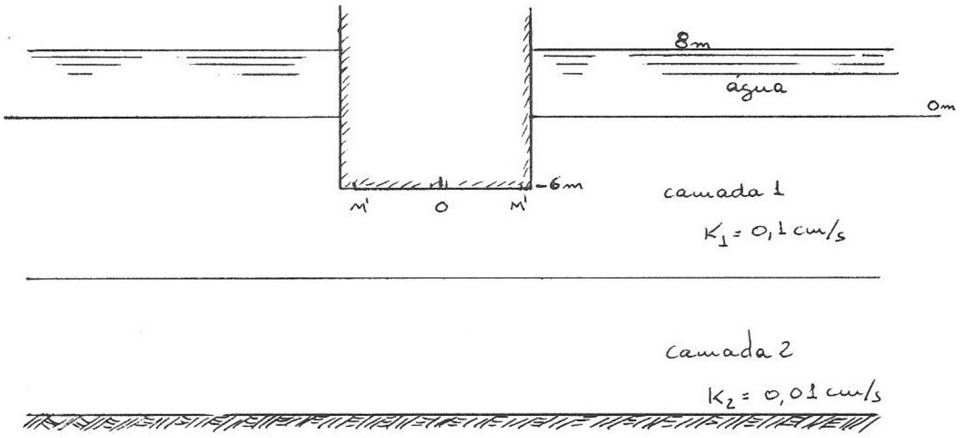
d) Interessa-se aos pontos singulares, tais como: fronteiras, mudança da camada, escoamento em torno de um ponto anguloso, troca de malha. Cada um destes problemas necessitam uma determinação particular de Ri, a cada ponto.

A EXPERIÊNCIA EFETUADA

O objetivo é realizar uma escavação em meio permeável, submetido a uma carga hidráulica, para se construir as fundações de uma pequena barragem de concreto. O meio é constituído de duas camadas de permeabilidade diferente.

K_1 = 0,1 cm/s e K_2 = 0,01 cm/s

Figura C



REALIZAÇÃO DO MODELO

Visto a simetria do problema, estudaremos a metade do problema. Escolhe-se uma malha onde os menores quadrados têm 2 m de lado.

As resistências do esquema elétrico são calculadas a partir de um valor de referência R = 100 Ω .

O ponto B (veja figura D) sendo levado a se movimentar da primeira camada para a segunda camada, obtem-se os valores das resistências h, j, k :

POSIÇÃO DE B	h (Ω)	j (Ω)	k (Ω)
Primeira Camada	1500	1500	3000
Separação	2727	15000	3000
Segunda Camada	15000	15000	30000

DETERMINAÇÃO DA PROFUNDIDADE DAS ESTACAS PRANCHAS

O objetivo é de determinar o gradiente de carga em A, para isto, mede-se a carga em A' e escreve-se :

$$\mathrm{grad}_A H = \frac{H_{A'} - H_A}{AA'} = \frac{H_{A'} - H_A}{H_c - H_A} \cdot \frac{H_c - H_A}{AA'} = \mu \cdot \frac{H_c - H_A}{AA'}$$

onde μ é a porcentagem da carga total em A'

$$\mu = \frac{H_{A'} - H_A}{H_c - H_A} = \frac{V_{A'} - V_A}{V_c - V_A}$$

$H_c - H_A = 14$ m = carga total $\quad AA' = 2$ m

$$\mathrm{grad}_A H = 7\mu$$

MEDIDA DE μ NA MALHA ELÉTRICA

A medida se faz graças a uma montagem realizada sobre a figura D, onde se mantém R_1 constante ($R_1 = 1000$) e varia-se R_2 até que o galvanometro não desvie. Então :

$$\mu = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Varia-se a profundidade CB mudando a posição de B, de B' a (figura D) e determina-se o μ correspondente a cada profundidade.

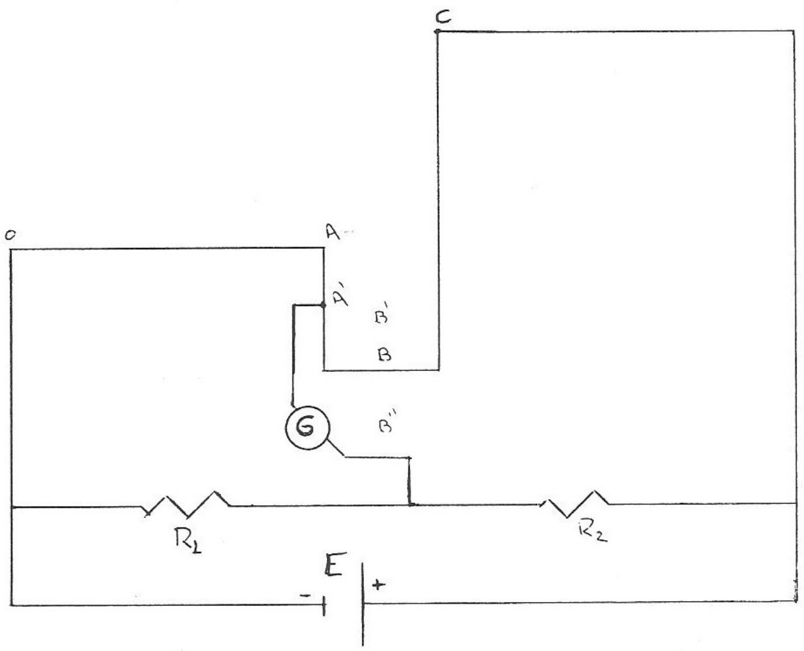
Traça-se a curva de $\mathrm{grad}_A H$ em função de CB e determina-se CB para $\mathrm{grad}_A H < i_c$

$$i_c = \frac{w_s - w}{w}(1 - p) = \frac{2,6 - 1}{1}(1 - 0,4)$$

$$i_c = 0,96$$

Toma-se como coeficiente de segurança o que coloca o ponto B no nó vizinho da posição determinada anteriormente.

FIGURA D



DETERMINAÇÃO DA VAZÃO DE INFILTRAÇÃO

Mede-se o coeficiente de vazão α tal que :

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{K_1 \ (H_c - H_A)}{q} = \frac{V_c - V_A}{RI} = \frac{r}{R}$$

r = resistência equivalente da malha
R = resistência de referência = 100

Medindo-se a resistência equivalente da malha nos bordos de A e C, usando um ponto de medida para cada posição de B, traça-se a curva α em função de CB.

SUBPRESSÃO NA BARRAGEM EM CONSTRUÇÃO

B estando localizado na sua posição definitiva, mede-se a carga no ponto A, A_1, A_2 situados na figura que segue :

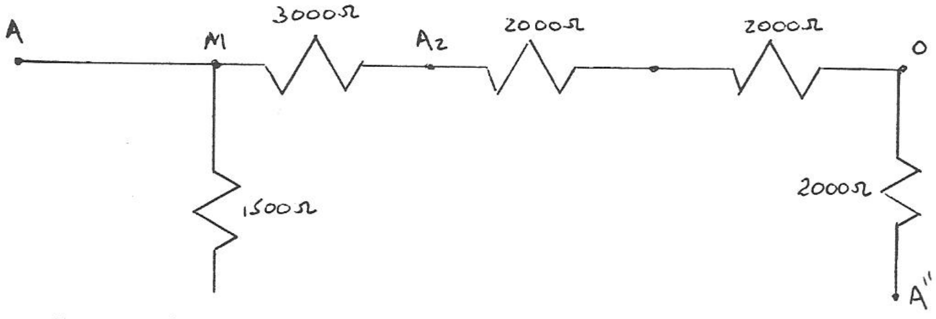


FIGURA E

Determina-se as porcentagens de carga :

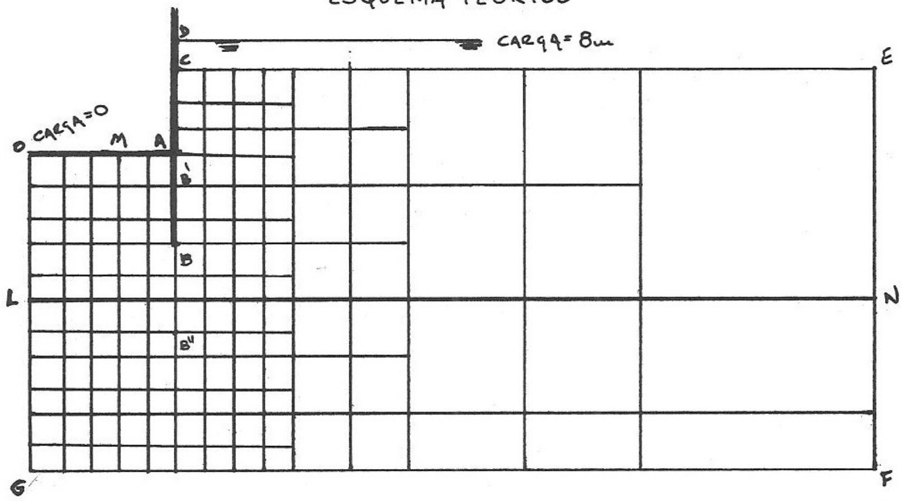
$$\mu_A = \frac{H_A - H_M}{H_c - H_M} = \frac{V_A - V_M}{V_c - V_M}$$

$$\mu_{A_1} = \frac{H_{A1} - H_M}{H_c - H_M} = \frac{V_{A1} - V_M}{V_c - V_M}$$

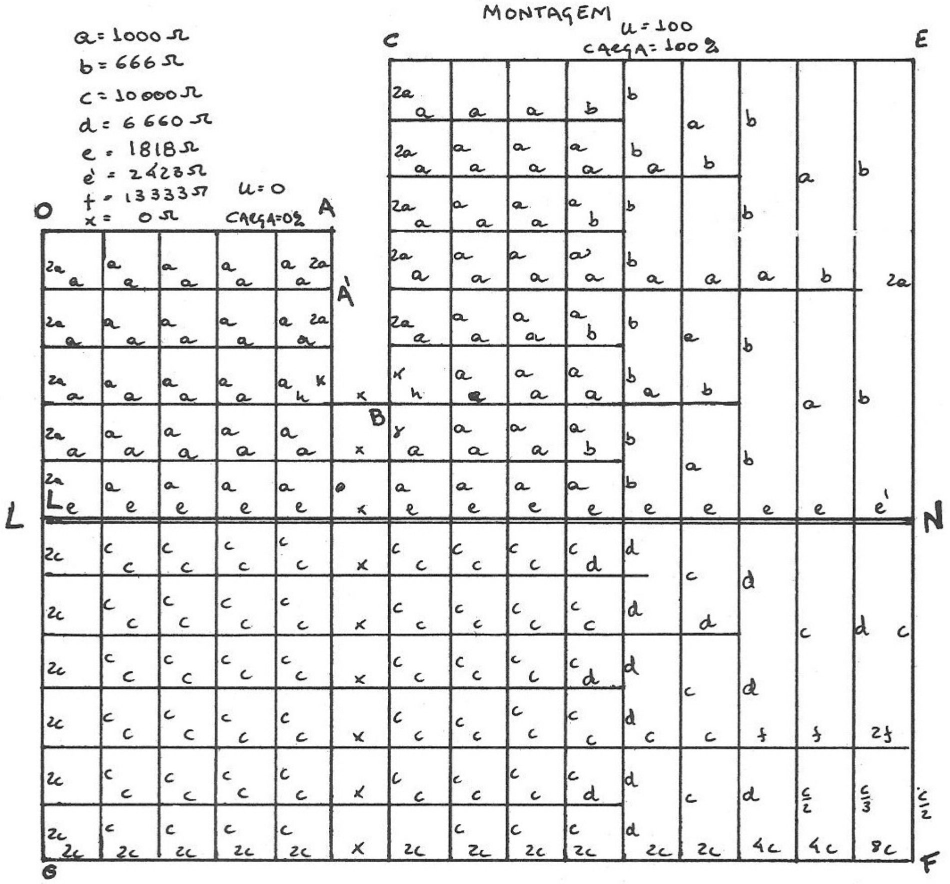
$$\mu_{A_2} = \frac{H_{A2} - H_M}{H_c - H_M} = \frac{V_{A2} - V_M}{V_o - V_M}$$

Na montagem da figura E de onde deduz-se a carga conhecendo-se $H_c - H_M = 14$ m.

ESQUEMA TEÓRICO



MONTAGEM



REFERÊNCIAS

- de MARSILY, G. - Cours de Hydrogeologie - Ecole des Mines de Paris - 1980

- Herbert, R. and Rushton, D.R. - Groundwater Flow Studies by Resistance Network - Geotechnique nº 16

ABSTRACT -- The objective of this model is to calculate, by electric analogy, the water flow through dams or ditches in porous media. It consists of transforming the flow equation, with partials derivatives, to an approximate equation by the method of finite differences, and find the electrical scheme only constituted of resistances that obey an analogous equation.