

# COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS NUMÉRICOS DE DIFERENÇAS FINITAS E DE ELEMENTOS FINITOS NO SISTEMA CÁRSSTICO-FISSURAL DA BACIA DO RIACHO DO MOCAMBO, SÃO FRANCISCO-MG

Lorrayne Silva<sup>1</sup>; Stela Dalva Santos Cota<sup>2</sup>

**Resumo** - Os modelos matemáticos são considerados excelentes ferramentas para auxiliar a gestão dos recursos hídricos. Neste trabalho foram comparados os resultados das modelagens realizadas por dois diferentes modelos numéricos tridimensionais em um domínio hidrogeológico comum e em regime estacionário. No primeiro modelo foi utilizado o método de elementos finitos (*HydroGeoSphere*) e no segundo, o método de diferenças finitas (*MODFLOW*). A comparação se deu no sistema cársstico-fissural da bacia do riacho Mocambo, município de São Francisco, MG. Para ambos os modelos foi aplicando uma abordagem de meio poroso equivalente. Os resultados obtidos indicam que os métodos oferecem soluções eficientes para o estudo, porém os resultados do método dos elementos finitos são sutilmente mais refinados.

**Abstract** - The mathematical models are excellent tools to assist the management of water resources. In this paper presents the results of the modeling performed by two different three-dimensional numerical steady state flow models in a common hydrogeological domain. In the first model was used the finite element method (*HydroGeoSphere*) and second, the finite difference method (*MODFLOW*). The models were developed for a karst-fissure system in the Mocambo creek watershed, São Francisco municipality, MG. The results indicate that both methods are effective for the study, however the results of the finite element method are slightly more refined.

**Palavra-Chave** – Recursos Hídricos, Modelagem Computacional de Fluxo Subterrâneo, Método de Elementos Finitos, Método das Diferenças Finitas.

---

<sup>1</sup> Mestranda do Centro de Pesquisa e Desenvolvimento da Tecnologia Nuclear, CDTN. Av., Pres. Antônio Carlos, 6.627, Campus UFMG – Pampulha – CEP 31270-901. Belo Horizonte/MG. E-mail: lorryne.geo@gmail.com

<sup>2</sup> Professora Doutora do Programa de Pós-Graduação do Centro de Desenvolvimento da Tecnologia Nuclear, CDTN. Av., Pres. Antônio Carlos, 6.627, Campus UFMG – Pampulha – CEP 31270-901. Belo Horizonte/MG. E-mail: sdsc@cdtn.br

## 1 - INTRODUÇÃO

A equação do fluxo de água subterrânea descreve o movimento das águas em um meio poroso e é derivada de bases físicas usando a lei de Darcy e da conservação de massas. Devido às geometrias complexas e aos processos físicos não lineares envolvidos, a solução é obtida através de técnicas numéricas, sendo que diferenças finitas e elementos finitos são os métodos mais utilizados [1,2,3].

A comparação entre os métodos, no presente trabalho, avalia a eficiência de ambas as soluções na aplicação de uma abordagem de meio poroso equivalente para descrever matematicamente o fluxo nos aquíferos que compõem o sistema cárstico-fissural da bacia do riacho Mocambo, município de São Francisco, norte de Minas Gerais.

O modelo conceitual base para a elaboração dos modelos numéricos de fluxo foi apresentado por Cota [4], onde também foi exposto o modelo de fluxo subterrâneo utilizando o *HydroGeoSphere* [5], o qual se aplica um método híbrido de elementos finitos para a solução - Elementos Finitos com Controle de Volume.

No modelo de fluxo comparativo, utilizando o método de diferenças finitas, foi empregado o modelo *MODFLOW* [6], agregado ao software *Visual MODFLOW* 2009.

## 2 – COMPARAÇÕES TEÓRICAS ENTRE OS MÉTODOS DE DIFERENÇAS FINITAS E ELEMENTOS FINITOS

A diferença fundamental na essência entre os dois métodos é o planejamento de suas malhas, que refletem nas técnicas matemáticas usadas para resolução da equação do fluxo. O método de elementos finitos apresenta sua malha composta por subdivisões poligonais irregulares, em geral triangulares. O método de diferenças finitas é composto por grades retangulares com nós, geralmente centrados. Detalhes matemáticos do método elementos finitos e de diferenças finitas de são discutidos por Terrien [5] e Harbaugh [7], respectivamente.

É importante ressaltar em relação às equações que em diferenças finitas calcula-se um valor de carga hidráulica para um nó, que equivale também ao valor médio da carga para a célula que o envolve. Nenhuma consideração é feita sobre a variação da carga hidráulica entre um nó e o próximo. Em elementos finitos, por outro lado, define com precisão a variação de carga dentro de um elemento por meio de funções base de interpolação [2]. As condições de contorno foram reproduzidas igualmente nos dois modelos.

### 3 – RESULTADOS DAS MODELAGENS

Nas modelagens foram utilizados apenas os módulos referentes ao fluxo saturado e, como o programa *HydroGeoSphere* não calcula diretamente a solução em regime permanente, esta foi obtida simulando a evolução temporal com condições constantes no tempo, até que não houvesse mais mudança significativa nos resultados entre dois intervalos de tempo consecutivos. Os limites assumidos para o domínio, assim como as propriedades hidráulicas e as condições de contorno foram definidos por Cota [4].

A Tabela 1 apresenta os erros estatísticos da calibração e o balanço hídrico nas condições de contorno para os modelos calibrados. As Figura 1 apresentam o mapa potenciométrico simulado com os softwares *HydroGeoSphere* e *MODFLOW*, respectivamente.

Tabela 1: Resultado das Calibrações Numéricas

Parâmetros	Diferenças Finitas	Elementos Finitos
<b>Erros Estatísticos de Calibração</b>		
Erro Médio Quadrático Normalizado (%)	2,75	1,51
Erro Médio Absoluto (m)	4,81	3,02
<b>Balanço Hídrico nas Condições de Contorno</b>		
Recarga (m <sup>3</sup> /h)	1151,2	1152,0
Carga Especificada (m <sup>3</sup> /h)	-54,4	- 156,0
Drenos (m <sup>3</sup> /h)	-1096,7	- 986,0
Poços (m <sup>3</sup> /h)	-0,4	- 0,4
Discrepância (%)	<b>0,00</b>	<b>0,01</b>

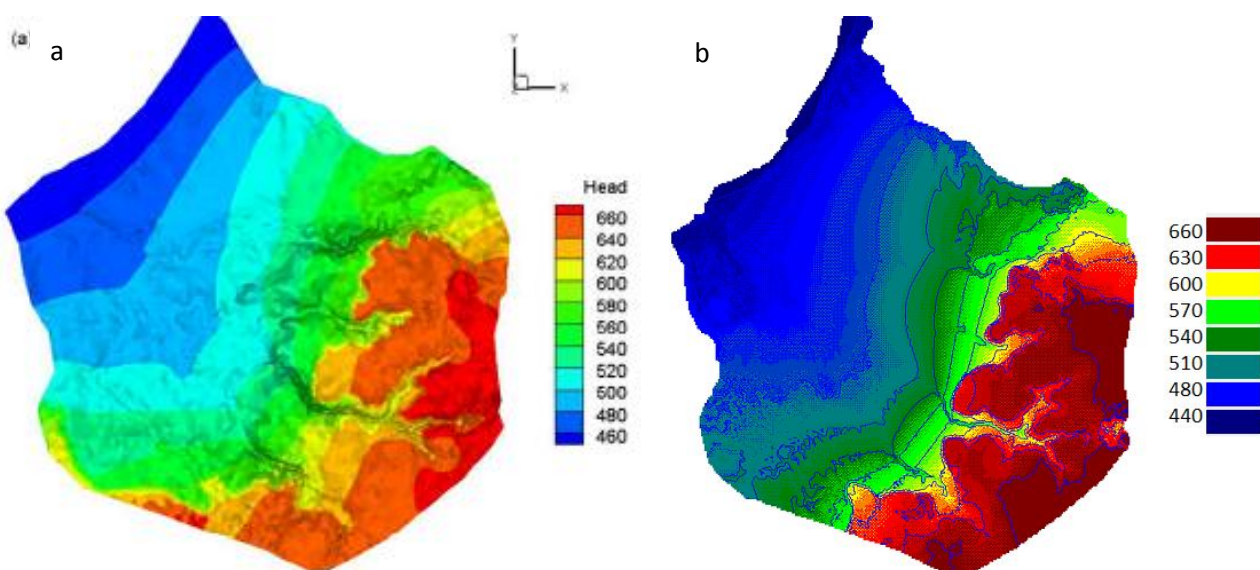


Figura 1 – Mapa potenciométrico simulado com os modelos *HydroGeoSphere* (a) e *MODFLOW* (b).

## 5 – CONCLUSÕES

A comparação dos resultados mostra que ambos os métodos são eficientes para a simulação do sistema cárstico-fissural da bacia do riacho Mocambo. Erros menores de calibração de níveis foram obtidos para o método de elementos finitos, como já era de se esperar, uma vez que sua malha apresenta maior grau de refinamento próximo às condições de contorno. A melhoria também pode ser atribuída às equações de cálculo do modelo de elementos finitos, onde a condutividade hidráulica incorpora uma extensão mais ampla para sua média em comparação com o método de diferenças finitas habitual.

A construção dos modelos nos dois softwares apresenta desafios diferentes. Enquanto *HydroGeoSphere* é mais demandante na entrada dos dados por ter interface gráfica limitada e necessitar a formatação de arquivos de texto, o método aplicado faz com que o software seja mais flexível, o que compensa em parte suas dificuldades de relacionamento com o usuário em relação aos softwares gráficos disponíveis que utilizam *MODFLOW*.

## 6 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] WANG, H.F., ANDERSON, M.P., 1982. *Introduction to Groundwater Modeling: Finite Difference and Finite Element Methods*. Freeman, San Francisco.
- [2] ANDERSON, M.P., WOESSNER W., W., 1992. *Applied groundwater modeling. Simulation of flow and advective transport*. Academic Press, Inc, San Diego, Califórnia.
- [3] BELCHER, W., R., WELCH, A. H., 2006. *Ground-Water Flow Modeling by the U.S. Geological Survey in Nevada: Uses and Approaches*. U.S. Geological Survey Fact Sheet 2006-3138, Nevada Water Science Center.
- [4] COTA, S. D. S., 2011. *Desenvolvimento de modelo conceitual e matemático do aquífero cárstico-fissural na bacia do Rio São Francisco. Gestão de recursos hídricos como uma ferramenta para a minimização de fluorose dentária – Projeto Flúor*. Relatório de Pós-Doutorado. University of Waterloo. Waterloo, Canadá.
- [5] THERRIEN, R., MCLAREN, R.G., SUDICKY, E.A, 2009. *HydroGeoSphere: A three-dimensional numerical model describing fully-integrated subsurface and surface flow and solute transport*. Groundwater Simulations Group, Draft 392p.
- [6] MCDONALD., M.G., HARBAUGH, A. W., 1983. *A modular three-dimensional finite-difference ground-water flow model*. Open-File Report 83-875. U. S Geological Survey.
- [7] HARBAUGH, A. W., 2005. *MODFLOW-2005, The U.S. Geological Survey Modular Ground-Water Model—the Ground-Water Flow Process. Techniques and Methods 6–A16*. U.S. Geological Survey.